Механика

1. Кинематика

Длина, время, скорость

1.1. Средний радиус Земли примерно равен R ≈ 6400 км. Выразить это расстояние в метрах.

Решение

Известно, что в 1 км содержится 1000 (10^3) м, поэтому

$$R \approx 6400 \cdot 1 \cdot 10^3 \approx 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

1.2. Космический корабль «Восток – 5» с Валерием Быковским на борту 81 раз облетел вокруг Земли. Найти расстояние, пройденное кораблём, если орбита была круговой и отстояла от поверхности Земли на расстоянии h = 200 км.

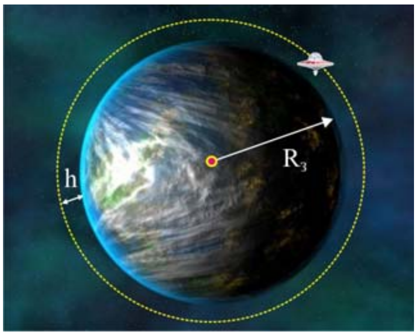

Рис. 1.2. Орбитальный полёт

Решение

1. Определим радиус орбиты корабля

$$R = R_З + h = 6400 + 200 = 6{,}6 \cdot 10^3 \text{км}.$$

2. Найдём длину окружности одного витка

$$\ell = 2\pi R = 6{,}28 \cdot 6{,}6 \cdot 10^3 = 4{,}14 \cdot 10^4 \text{км}.$$

3. Путь, пройденный за всё время полёта

$$L = \ell \cdot 81 = 3{,}36 \cdot 10^6 \text{км}.$$

1.3. Во сколько раз радиус Земли больше расстояния между Москвой и Петербургом, которое составляет примерно r ≈ 640 км?

Решение

1. Принимая радиус Земли равным $R_З \approx 6400$ км, определим:

$$\kappa = \frac{R_З}{r} \cong \frac{6400}{640} = 10.$$

1.4. Некто, из ботаников, решил на досуге изготовить глобус, диаметр которого был бы в миллиард раз меньше диаметра Земли. Поместится ли такой глобус в комнате?

Решение

1. Диаметр Земли равен: $D = 2R = 2 \cdot 6400$ км $= 12800$ км $= 1{,}28 \cdot 10^7$ м.

2. Так как 1 миллиард, это 10^9, то диаметр изготавливаемого глобуса определится как:

$$d = \frac{D}{10^9} = \frac{1{,}28 \cdot 19^7}{10^9} = 1{,}28 \cdot 10^{-2}\,м = 1{,}28\,см,$$

т.е. глобус поместится не то что в комнате, а даже в кармане.

1.5. Гора Эверест (Джомолунгма), находящаяся на границе Непала и Китая имеет высоту около h = 8800 м (если точно, то 8848 м). Какую долю земного радиуса $R_З \approx$ 6400 км составляет высота горы?

Решение

1. Примем радиус Земли за единицу и составим следующую пропорцию

$$\begin{matrix} 6400 & - & 1 \\ 8{,}8 & - & x \end{matrix},$$

из которой следует, что:

$$6400x = 8{,}8 \Rightarrow x = \frac{8{,}8}{6400} \cong 1{,}38 \cdot 10^{-3}.$$

1.6. Достаточно ли одной катушки, чтобы получить кусок нити в миллионную долю длины железнодорожного пути между Москвой и Петербургом? Длина нити на катушке составляет x = 200 м, а расстояние между городами – L = 640 км.

Решение

1. Определим, чему равна миллионная доля расстояния между городами

$$\ell = L \cdot 10^{-6} = 6{,}4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6} = 0{,}64\,м,$$

полученный результат позволяет дать утвердительный ответ – хватит.

1.7. Как определить при помощи масштабной линейки диаметр одинаковых швейных иголок?

Решение

7. Линейка с сантиметровыми делениями не позволяет точно измерить толщину иголки, в этой связи надо положить рядом, например, 10 иголок (чем больше, тем точнее) и измерить их суммарную длину, а затем, разделить на число иголок.

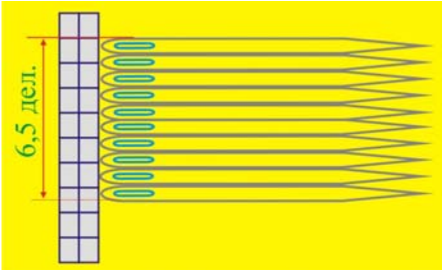

Рис. 1.7. Измерение толщины иголок

1.8. На поверхности воды разлили нефть объёмом V = 1 м^3. Какую площадь займёт нефтяное пятно, при толщине плёнки h = $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ м?

Решение

1. Запишем уравнение объёма V через площадь пятна S и толщину образовавшейся плёнки h

$$V = Sh, \quad \Rightarrow \quad S = \frac{V}{h} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^7\,м^2 = 40\,км^2.$$

1.9. Куб, объёмом V = 1 м^3 разделили на кубические объёмы v = 1 мм^3. Какой длины ряд получится из этих кубиков, если их плотно уложить рядом друг к другу?

Решение

1. Переведём объём малого кубика в м^3, с учётом того, что 1 м^3 = $1\cdot10^9$ мм^3, т.е.

$$v = 1\,\text{мм}^3 = 1\cdot10^{-9}\,\text{м}^3 .$$

2. Определим количество малых кубиков в исходном объёме

$$n = \frac{V}{v} = \frac{1}{10^{-9}} = 1\cdot10^9 .$$

3. Длина грани большого кубика составляет L = 1 м, длина грани одного малого кубинка равна l = 1 мм = $1\cdot10^{-3}$ м. Протяжённость составленных в ряд всех малых кубиков составит

$$x = \ell n = 1\cdot10^9\cdot1\cdot10^{-3} = 1\cdot10^6\,\text{м} = 10^3\,\text{км} .$$

1.10. Девочки сделали снеговика, а мальчики соорудили его точную копию, но в два раза большей высоты. Во сколько раз объём копии больше объёма оригинала?

Решение

1. Изготовление точной копии предусматривает увеличение всех размеров, аналогично высоте – в 2 раза, т.е. объём снеговика мальчиков увеличится в 2^3 раз, т.е. ровно в 8 раз.

1.11. Средняя продолжительность жизни человека в нашей стране, когда-то была равна 60 годам. Выразить это время в секундах.

Решение

1. Переведём годы в сутки, сутки в часы, а затем часы в секунды

$$60\text{лет} = 60\cdot24\cdot365 = 5{,}26\cdot10^5\,\text{сас.} = 3600\cdot5{,}26\cdot10^5 = 1{,}89\cdot10^9\,\text{с} .$$

1.12. Во сколько раз период обращения Земли вокруг Солнца T больше периода собственного вращения нашей планеты t ?

Решение

1. Выразим заданные периоды вращения в часах

$$T = 365\cdot24 = 8{,}76\cdot10^3\,\text{часов};\quad t = 24\,\text{часа} .$$

2. Определим соотношение периодов

$$n = \frac{T}{t} = 365 .$$

1.13. Куб объёмом V = 1 м^3 разделили на равные кубики объемом v = 1 мм^3 каждый. Сколько времени T потребуется для укладки малых кубиков в ряд, если на размещение одного кубика тратится время t = 1 с?

Решение

1. Количество кубиков было определено в задаче 1.9

$$n = \frac{V}{v} = \frac{1}{10^{-9}} = 1\cdot10^9$$

2. Время укладки составит

$$T = nt = 1\cdot 10^9 \cdot 1 = 10^9 c = 2{,}78\cdot 10^5 час. = 1{,}16\cdot 10^4 сут. = 31{,}7 лет .$$

1.14. Какую скорость v (в километрах в час) должен развивать реактивный самолёт, чтобы она была равна скорости звука в воздухе $c \approx 340$ м/с?

Решение

1. Переведем скорость звука из м/с в км/час с учётом того, что в 1 км содержится 1000 м и 1 час = 3600 с

$$v = \frac{340\cdot 3600}{1000} = 1224\frac{км}{час}.$$

1.15. Скорость истребителя МИГ-21 равна v_1 = 611,1 м/с. Мировой рекорд скорости при спуске на лыжах – v_2 = 217, 7 км/час. Во сколько раз скорость истребителя больше скорости лыжника?

Решение

1. Переведём скорость истребителя из м/с в км/час

$$v_1 = \frac{611{,}1\cdot 3600}{1000} = 611{,}1\cdot 3{,}6 \cong 2{,}2\cdot 10^3\frac{км}{час}.$$

2. Найдём соотношение скоростей самолёта и лыжника

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2{,}2\cdot 10^3}{217{,}7} \cong 10 .$$

1.16. Средняя скорость движения Земли вокруг Солнца v = 30 км/с. Какой путь проходит наша планета за сутки?

Решение

1. Переведём скорость Земли в привычные единицы, км/час

$$v = 30\cdot 3600 = 1{,}08\cdot 10^5 км/час .$$

2. Определим путь, пройденный Землей за 24 часа

$$s = vt = 1{,}08\cdot 10^5\cdot 24 \approx 2{,}6\cdot 10^6 км .$$

1.17. За какое время плывущий по реке плот пройдёт расстояние s = 150 м, если его скорость v = 0,5 м/с?

Решение

1. Определим время прохождения плотом заданного расстояния

$$t = \frac{s}{v} = \frac{150}{0{,}5} = 300c = 5мин .$$

1.18. Пассажирский самолёт пролетает над городом t = 2 мин. Протяжённость города в направлении полёта составляет r = 30 км. Найти скорость самолёта, выразив её в км/час и м/с.

Решение

1. Выразим время полёта в часах

$$t = \frac{2}{60} \cong 0{,}03 \text{час}.$$

2. Определим скорость самолёта в км/час

$$v = \frac{r}{t} = \frac{30}{0{,}03} = 900\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

3. Переведём км/час в м/с

$$v = \frac{900}{3{,}6} = 250\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.19. Экспедиция Магеллана совершила кругосветное путешествие за t_1 = 3 года, а Юрий Гагарин, первый в мире космонавт, облетел земной шар за t_2 = 89 мин. Путь пройденный каравеллами Магеллана, с учётом петляний, был примерно в два раза больше протяжённости орбиты. Во сколько раз η средняя скорость полёта корабля «Восток» больше средней скорости каравелл?

Решение

1. Переведём заданные промежутки времени в часы

$$t_1 = 3 \cdot 365 \cdot 24 = 26280 \text{час}; \quad t_2 = \frac{89}{60} \cong 1{,}5 \text{час}.$$

2. Запишем уравнения для средних скоростей судов и орбитального корабля

$$v_1 = \frac{2s}{t_1}; \quad v_2 = \frac{s}{t_2}.$$

3. Определим отношение скоростей

$$\eta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\dfrac{s}{t_2}}{\dfrac{2s}{t_1}} = \frac{2t_1}{t_2} = \frac{2 \cdot 26280}{1{,}5} \cong 3{,}5 \cdot 10^4.$$

1.20. Молодой бамбук за сутки (T = 24 часа) может вырасти на h = 86,4 см. На сколько вырастает бамбук за τ = 1 с?

Решение

1. Определим среднюю скорость роста бамбука в м/с

$$v = \frac{h}{T} = \frac{0{,}864}{24 \cdot 3600} = 1 \cdot 10^{-5}\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. За одну секунду, таким образом? бамбук может вырасти

$$h_1 = 1 \cdot 10^{-5} \text{м} = 10 \text{мкм}.$$

1.21. Известно, что толщина морского льда увеличивается в среднем на h_1 = 5 мм в сутки. Какой станет толщина льда за неделю, если первоначальный покров был толщиной h_0 = 2 см?

Решение

1. Представим скорость нарастания льда в м/с

$$v = \frac{h}{T} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{24 \cdot 3600} = 5{,}8 \cdot 10^{-8}\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Определим увеличение толщины льда за неделю

$$h_2 = v\tau = 5{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 7 = 0{,}035 \text{м}.$$

3. Полная толщина ледяного покрова составит

$$H = h_0 + h_1 = 0{,}05\,м = 5{,}5\,см.$$

1.22. С какой постоянной скоростью должна перемещаться нефть в трубопроводе сечением s = 100 см^2, чтобы в течение часа перекачивалось 18 м^3 «чёрного золота»?

Решение

1. Переведём площадь сечения трубы в м^2

$$s = 100 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 0{,}01\,м^2.$$

2. Определим необходимую скорость перекачивания нефти, с учётом того, что в 1 часе содержится 3600 с

$$v = \frac{V}{st} = \frac{18}{0{,}01 \cdot 3600} = 0{,}5\,\frac{м}{с}.$$

1.23. По бикфордову шнуру пламя распространяется со скоростью v = 0,8 см/с. Какой длины шнур нужно взять, чтобы диверсант мог отбежать на расстояние s = 120м со скоростью v_1 = 4 м/с?

Решение

1. Определим время бега диверсанта на расстояние 120 м

$$t_1 = \frac{s}{v_1}.$$

2. Определим расстояние *l* которое проходит пламя в бикфордовом шнуре

$$\ell = vt_1 = s\frac{v}{v_1} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 120}{4} = 0{,}24\,м = 24\,см.$$

1.24. На дорогу от Москвы до Кубинки, которая расположена на расстоянии *s* = 63 км, пассажир электрички тратит t = 1 час 10 мин. Средняя скорость движения электрички v = 70 км/час. Какое время занимают остановки.

Решение

1. Определим время в течение, которого движется электропоезд

$$t_1 = \frac{s}{v}.$$

2. Общее время остановок

$$\Delta t = t - t_1 = t - \frac{s}{v} = 1{,}17 - \frac{63}{70} = 0{,}27\,часа =\cong 16\,мин.$$

1.25. Автобус, двигавшийся со скоростью v = 50 км/час, простоял перед железнодорожным переездом t = 1,5 мин. С какой скоростью автобус должен продолжить движение, чтобы не выйти из графика, если расстояние от переезда до ближайшей остановки s = 3,75 км?

Решение

1. Определим расстояние, которое бы проехал автобус за время стоянки на железнодорожном переезде

$$x = vt$$

2. Время движения с компенсирующей задержку скоростью v_1 и это же время в случае сохранения скорости неизменной

$$t_1 = \frac{s}{v_1}; \qquad t_1 = \frac{s - x}{v},$$

3. Приравнивая полученные значения времени получим

$$\frac{s}{v_1} = \frac{s - vt}{v}, \quad \Rightarrow \quad v_1 = v\frac{s}{s - vt} = 50\frac{3{,}75}{3{,}75 - 50 \cdot 0{,}025} = 75\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

1.26. Поезд прошёл путь s = 200 км. В течение t_1 = 1 час он двигался со скоростью v_1 = 100 км/час, затем сделал остановку на время t_2 = 30 мин. Оставшуюся часть пути поезд прошёл со скоростью v_3 = 40 км/час. Какова средняя скорость движения поезда?

Решение

1. За время t_1 поезд прошёл половину пути, т.е. 100 км. Определим время прохождения второй половины пути со скоростью v_3

$$t_3 = \frac{s}{2v_3}.$$

2. Общее время движения поезда

$$t = t_1 + t_2 + t_3.$$

3. Средняя скорость движения по всему маршруту

$$< v >= \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{200}{1 + 0{,}5 + \frac{100}{40}} = 50\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

1.27. Определить среднюю скорость движения поезда, если первую половину пути он прошёл со скоростью v_1 = 50 км/час, а вторую половину пути со скоростью v_2 = 100 км/час.

Решение

1. Время прохождения первой и второй половины пути

$$t_1 = \frac{s}{2v_1}; \quad t_2 = \frac{s}{2v_2}.$$

2. Суммарное время движения должно быть равно прохождению всего пути со средней скоростью <v>

$$t_1 + t_2 = t; \quad \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = \frac{s}{< v >}; \quad \Rightarrow \quad < v >= \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 100}{50 + 100} = 66{,}7\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

1.28. Два автомобиля одновременно стартовали из Москвы в Петербург. Один автомобиль ехал первую половину пути со скоростью v_1 = 120 км/час, а вторую – со скоростью v_2 = 80 км/час. Другой автомобиль первую половину времени ехал со скоростью v_1 = 120 км/час, а вторую – со скоростью v_2 = 80 км/час. Какой автомобиль приедет в Петербург раньше?

Решение

1. Определим среднюю скорость первого автомобиля, воспользовавшись расчетным уравнением предыдущей задачи

$$< v_1 >= \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 80}{120 + 80} = 96\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

2. Средняя скорость второго автомобиля определится из следующих соображений

$$< v > t = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}; \quad \Rightarrow \quad < v_2 >= \frac{v_1 + v_2}{2} = 100 \frac{км}{час},$$
таким образом, второй автомобиль имел несколько большую скорость, следовательно, прибудет в пункт назначения быстрее.

1.29. Автомобиль при движении с грузом перемещался со средней скоростью v_1 = 40 км/час, а обратно по тому же маршруту возвращался без груза со средней скоростью v_2 = 60 км/час. Чему равна средняя скорость движения автомобиля на пути до пункта назначения и обратно?

Решение

1. В задаче рассматриваются два равных пути, проходимых с разными скоростями, поэтому средняя скорость определится как
$$< v >= \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{100} = 48 \frac{км}{час}.$$

1.30. Найти среднюю скорость самолёта, если известно, что первую треть пути он пролетел со скоростью v_1 = 700 км/час, вторую треть – со скоростью v_2 = 500 км/час, а последнюю треть со скоростью вдвое большей средней скорости на первых двух участках.

Решение

1. Построим графическую схему движения (рис. 130), состоящую из трёх равных участков протяжённостью x/3 каждый. На участках оА, АВ и ВС скорости обозначим как $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Запишем далее соответствующие уравнения движения

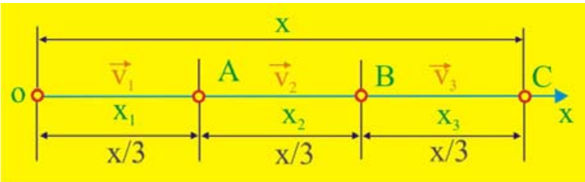

Рис. 1.30. Схема движения самолёта

$$x_1 = v_1t_1; \quad x_2 = v_2t_2; \quad x_3 = v_3t_3. \tag{1}$$

2. Разрешим уравнения движения относительно времени и представим полное время движения, как сумму времён
$$\frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{v_3} = \frac{x}{< v >}. \tag{2}$$

3. Определим далее среднюю скорость полёта самолёта при прохождении им первых двух участков протяжённостью $2x/3$
$$\frac{x}{3v_1} + \frac{x}{3v_2} = \frac{2x}{3 < v_{1,2} >}; \quad \Rightarrow \quad < v_{1,2} >= \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}. \tag{3}$$

4. Найдём среднюю скорость на третьем участке полёта, которая, по условию задачи, в два раза больше средней скорости на первых двух участках, т.е.
$$< v_3 >= \frac{4v_1v_2}{v_1 + v_2}. \tag{4}$$

5. Подставим найденные значения скоростей в уравнение (2)
$$\frac{1}{3v_1} + \frac{1}{3v_2} + \frac{v_1 + v_2}{3 \cdot 4v_1v_2} = \frac{1}{< v >}. \tag{5}$$

6. Выразим из уравнений (5) среднюю скорость полёта на всём маршруте
$$\frac{4v_1 + 4v_2 + v_1 + v_2}{12v_1v_2} = \frac{1}{< v >}; \quad \Rightarrow \quad < v >= \frac{12v_1v_2}{5(v_1 + v_2)} = \frac{12 \cdot 700 \cdot 500}{5(500 + 700)} = 700 \frac{км}{час}. \tag{6}$$

1.31. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что на прохождении отдельных участков дистанции, длины которых относятся как 1 : 3 : 4 : 2, потребовались промежутки времени, находящиеся в отношении 2 : 4 : 3 : 1, а на последнем участке скорость поезда составила v_4 = 80 км/час. Движение поезда на отдельных участках считать равномерным.

Решение

1. Протяжённость наименьшего отрезка пути примем за x, тогда скорость на последнем участке определится как

$$\frac{2x}{1} = 80\frac{\text{км}}{\text{час}}; \quad \Rightarrow \quad x = 40\,\text{км}.$$

2. Протяжённость всего пути поезда

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40 + 120 + 160 + 80 = 400\,\text{км}.$$

3. Так как на последнем участке скорость составляет v_4 = 80 км/час, и расстояние равно 80 км, то единицей времени будет являться t = 1 час. Полное время движения, таким образом, составит

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2 + 4 + 3 + 1 = 10\,\text{час}.$$

4. Так как по определению средняя скорость есть отношение перемещения исследуемого объекта к времени, за которое перемещение происходит, то

$$\langle v \rangle = \frac{X}{T} = 40\frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{v_4}{2}.$$

1.32. На дорогу от Кубинки до Москвы автомобиль ранним утром движется примерно t = 40 мин. Во всякое другое время, чтобы ехать с привычной скоростью, водителю приходится ехать «огородами», при этом путь удлиняется на η = 20% и на остановки тратится Δt = 12 мин. При всём при том водитель экономит в общей сложности τ = 15 мин. Во сколько раз скорость в пробках будет меньше его обычной скорости ранним утром?

Решение

1. Скорость автомобиля при движении по свободной трассе на расстоянии x определится как

$$v_1 = \frac{x}{t}.$$

2. Скорость автомобиля по объездному маршруту

$$v_2 = \frac{1{,}2x}{t + \tau + \Delta t}.$$

3. Отношение скоростей движения

$$n = \frac{\dfrac{x}{t}}{\dfrac{1{,}2x}{t + \tau - \Delta t}} = \frac{t + \tau + \Delta t}{1{,}2t} = \frac{67}{48} \cong 1{,}4.$$

Материальная точка. Система отсчёта. Путь. Перемещение

1.33. Можно ли принять Землю за материальную точку при расчете:

- расстояния от Земли до Солнца?
- пути, пройденного Землёй по орбите вокруг Солнца за месяц?
- длины экватора Земли?
- скорости движения точки экватора в суточном вращении Земли вокруг оси?
- скорости движения Земли по орбите вокруг Солнца;?
- движения спутника вокруг Земли;?
- посадки самолёта?

Решение

1. Материальная точка в классической механике представляется моделью , в качестве которой выступают тела, размерами, формой и внутренним строением в условиях данной задачи можно пренебречь. В динамике материальная точка лишена геометрических размеров, но обладает массой. Такого на самом деле быть не может, потому что масса непременно должна занимать некий объём. Материальные точки представляют собой абстракции, идеализированные образы реально существующих тел. Тела в кинематике можно считать точками в тех случаях, когда в рассматриваемом движении перемещения многократно превосходят размеры движущихся объектов. Другими словами, важны не сами размера тела, а его относительные размеры. При прямолинейном поступательном движении тел их без всяких оговорок можно принимать за материальные точки. Если в рассматриваемом движении присутствует вращательная составляющая, то модель материальной точки принимается в соответствии с конкретными обстоятельствами.

2. Так, например, движущийся прямолинейно авианосец можно считать материальной точкой. Подкрученный футбольный мяч, несмотря на его, относительно малые с авианосцем размеры – нельзя. Бессмысленно рассматривать вращение токи вокруг самой себя.

3. При вычислении расстояния от Земли до Солнца ($r \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ км) Землю ($R_З \approx$ 6400 км), так же как и Солнце ($R_C \approx 7 \cdot 1010^3$ км) можно считать материальными точками, потому что их взаимное расположение превосходит многократно их собственные размеры.

4. Путь, пройденный Землёй по орбите вокруг Солнца за месяц, будет составлять

$$s = v \cdot t = 30\frac{\text{км}}{\text{с}} \cdot (30 \cdot 24 \cdot 3600) \approx 7{,}8 \cdot 10^7 \text{км},$$

что превосходит размеры Земли, т.е. в этом расчёте Землю можно принимать за материальную точку.

5. При вычислении длины экватора Земли

$$\ell = 2\pi R_З \approx 6{,}28 \cdot 6400 \approx 4 \cdot 10^4 \text{км},$$

землю нельзя считать точкой, т.к. в вычислении используется её характерный геометрический размер – примерный радиус.

6. При определении скорости движения точки экватора в суточном вращении Земли вокруг оси

$$v = \omega R_З = \frac{2\pi}{T} R_З \approx \frac{6{,}28 \cdot 6400}{24 \cdot 3600} \approx 0{,}465 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

наша планета тоже не может быть принята за материальную точку.

7. При вычислении скорости движения Земли по орбите вокруг Солнца собственные размеры Земли на много меньше радиуса её орбиты, они не имеют большого значения, поэтому Землю можно считать точкой.

8. Задачи, связанные с движением спутника вокруг Земли используют такую характерную величину, как радиус орбиты

$$R_C = R_З + h\ ,$$

где $R_З \approx 6400$ км – радиус Земли, h – высота орбиты над поверхностью нашей планеты, т.е в условиях этой задачи Землю никак нельзя принимать за точку.

9. Посадка самолёта, как таковая, не может происходить на объект, не обладающий геометрическими размерами.

1.34. Можно ли принять за материальную точку снаряд при расчёте:

- дальности полёта снаряда?
- аэродинамической оптимизации формы снаряда?

Решение

1. В первом случае, при расчёте траектории или дальности полёта снаряда его геометрическая форма и размеры не имеют значения, он мал по сравнению с пролетаемым расстоянием, в этой связи, снаряд можно полагать материальной точкой.

2. Во втором случае, при оптимизации формы, речь, прежде всего, идёт о размерах и формах, поэтому рассуждения о точечной модели не уместны.

1.35. Можно ли принять за материальную точку железнодорожный состав длиной около 1 км при расчёте пути пройденного:

- за несколько секунд?
- за несколько часов?

Решение

1. Примем скорость поезда равной $v \approx 60$ км/час $\approx 16{,}7$ м/с. За время, например, $t_1 = 10$ с, поезд пройдёт всего 167 м, что меньше его собственных размеров, поэтому состав точкой считать нельзя.

2. Во втором случае, расстояние пройденное поездом, например за 10 час. составит 600 км, что превосходит собственные размеры, здесь понятие материальной точки вполне уместно.

---

1. 36. Поезд прибыл из Владивостока в Москву. Равные ли пути прошли при этом локомотив и хвостовой вагон? Можно ли в этой задаче поезд рассматривать как материальную точку?

Решение

1. Расстояние от Владивостока до Москвы составляет $s \approx 8977$ км, если длину поезда принять равной $r = 1$ км, то путь локомотива от хвостового вагона будет отличаться на $\eta = 1км/8977\ км \approx 1\cdot 10^{-4}\%$, что даёт основание поезд, несмотря на формально разные пройденные расстояния считать материальной точкой.

1.37. Поезд длиной L = 120 м движется по мосту со скоростью v = 18 км/час. За какое время поезд пройдёт мост длиной s = 480 м? Можно ли поезд считать материальной точкой?

Решение

1. Выразим скорость поезда в м/с

$$v = \frac{18}{3{,}6} = 5\frac{м}{с}\ .$$

2. Определим время в течение которого поезд пройдёт мост

$$t = \frac{L+s}{v} = \frac{120+480}{5} = 120\,c = 2\,мин.$$

3. Так как размеры поезда и моста соизмеримы, то модель материальной точки не приемлема. Если принять поезд за точку, то время прохождения моста составит

$$t = \frac{s}{v} = \frac{480}{5} = 96\,c = 1{,}6\,мин\ ,$$

что ощутимо отличается от правильного результата.

1.38. Путь или перемещение оплачиваются в такси и в самолёте?

Решение

1. По сегодняшним капиталистическим представлениям вопрос не совсем корректен. Если задачу рассматривать с позиций раньшего, государственного времени, то в такси счётчик отсчитывает время, умножив которое на величину средней скорости получали путь. Если считать, что самолёт летит по прямой, то стоимость билета должна быть неким эквивалентом перемещению. Хотя временами билет до Владивостока, куда лететь три часа, стоит дороже авиабилета до Москвы, куда путешествовать над облаками более 8часов. С другой стороны, самолёты на дальние расстояния, когда протяжённость маршрута соизмерима с размерами Земли, как правило, по прямой не летают.

1.39. Мяч с высоты 1 м над поверхностью земли бросают вертикально вверх на высоту 2 м, который затем падает в точку броска. Найти путь и перемещение мяча.

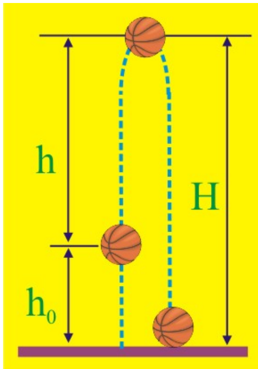

Рис. 1.39. Путь и перемещение мяча

Решение

1. Перемещением называется кратчайшее расстояние между начальной и конечной точкой движения. В данном случае начальная точка расположена на высоте над поверхностью h_0 = 1 м, поэтому при падении мяча на землю его перемещение тоже составит 1 м.

2. Путь численно равен расстоянию, пройденному за всё время движения, в рассматриваемом случае путь определится как:

$$s = h + H + h_0 = 5м\ .$$

1.40. Самолёт пролетел на север 400 км, а затем повернул на восток и пролетел ещё 300 км. Найти путь и перемещение самолёта за всё время полёта. Нарисовать траекторию движения, считая, что полёт протекает в одной плоскости.

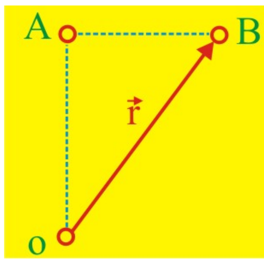

Рис. 1.40. Путь и перемещение самолёта

Решение

1. Путь, проделанный самолётом

$$s = oA + AB = 700\,км\ .$$

2. Перемещение самолёта

$$|\vec{r}| = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\,км\ .$$

1.41. На рис. 1.41 показано положение точек A, B, C, D в системе декартовых координат. Найти координаты всех точек и определить расстояния AB, AC, CD и AD.

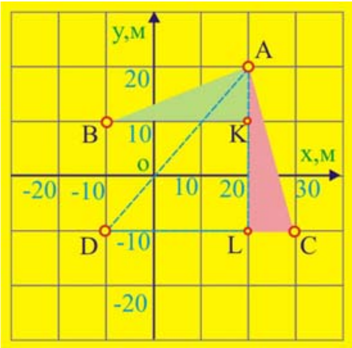

Рис. 1.41. Координаты точек

Решение

1. Запишем координаты заданных точек

$$\left.\begin{aligned} &A(20;20);\\ &B(-10;10)\\ &C(30;-10)\\ &D(-10;-10)\end{aligned}\right\}$$

2. Расстояния AB = AC определим как гипотенузы равновеликих прямоугольных треугольников ΔABK и Δ ФДС

$$AB = AC = \sqrt{10^2 + 30^2} = 31{,}6\,\text{м}.$$

3. Расстояние CD = 40 м.

4. Расстояние AD определим как гипотенузу ΔALD

$$DA = \sqrt{30^2 + 30^2} = 42{,}4\,\text{м}.$$

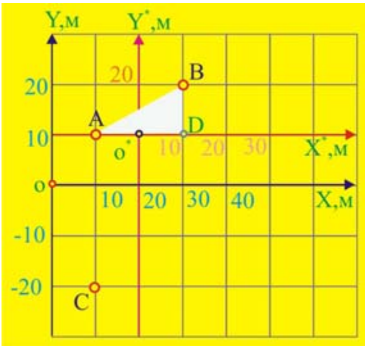

Рис. 1.42. Две системы отсчёта

1.42. Определить координаты точек A, B, C в декартовых прямоугольных системах координат {XOY} и {X*O*,Y*}. Найти расстояние AB в этих системах отсчёта.

Решение

1. Координаты точек в системе $\{XOY\}$:

$$\left.\begin{aligned} &A(10;10);\\ &B(30;20);\\ &C(10;-20).\end{aligned}\right\}$$

2. Координаты точек в системе $\{X^*O^*Y^*\}$

$$\left.\begin{aligned} &A(-10;0);\\ &B(10;10);\\ &C(-10;-30).\end{aligned}\right\}$$

3. Расстояние AB в заданных системах отсчёта будет одинаковым и равным длине гипотенузы ΔABC

$$AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} \approx 22{,}4\,\text{м}.$$

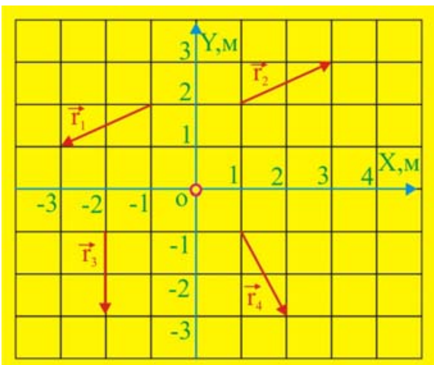

Рис. 1.43. Перемещения точек

1.43. На рис. 1.43 показаны четыре перемещения $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4\}$. Найти начальные и конечные положения точек, проекции перемещений на координатные оси, модули каждого перемещения.

Решение

1. Начальные и конечные положения точек заданных перемещений:

$$\vec{r}_1[(-1;\,2);(-3;\,1)];\quad \vec{r}_3[(-2;\,-1);(-2;\,-3)];$$
$$\vec{r}_2[(1;\,2);(3;\,3)];\quad \vec{r}_4[(1;\,-1);(2;\,-3)].$$

2. Проекции перемещений:

$$r_{1(x)} = -2\,\text{м};\quad r_{1(y)} = -1\,\text{м};\quad r_{3(x)} = 0;\quad r_{3(y)} = -2\,\text{м};$$
$$r_{2(x)} = 2\,\text{м};\quad r_{2(y)} = 1\,\text{м};\quad r_{4(x)} = 1\,\text{м};\quad r_{4(y)} = -2\,\text{м};$$

3. Модули перемещений $|\vec{r}| = |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_4|$ определятся как гипотенуза прямоугольных треугольников с катетами, равными a = 1 м, b = 2 м

$$|\vec{r}| = \sqrt{1^2 + 2^2} \approx 2{,}24\,\text{м}.$$

Модуль перемещения $|\vec{r}_3| = 2$ м.

1.44. В момент времени t_1 = 1с тело находилось в некоторой точке плоскости с координатами $(x_1 = -2\,\text{м};\ y_1 = 2\,\text{м})$. К моменту времени t_2 = 3с тело переместилось в точку с координатами $(x_2 = 3\,\text{м};\ y_2 = -3\,\text{м})$. Найти время движения тела, проекции перемещения на оси декартовой системы координат и модуль перемещения.

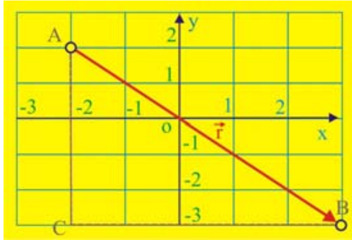

Рис. 1.44. Перемещение на плоскости

Решение

1. Время движения тела

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2\text{с}.$$

2. Проекции вектора перемещения

$$r_x = 5\,\text{м};\quad r_y = -5\,\text{м}.$$

3. Модуль вектора перемещения определится как гипотенуза прямоугольного треугольника ΔABC

$$|\vec{r}| = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}1\,\text{м}.$$

1.45. На рис. 1.45 приведена траектория движения материальной точки из начального положения A в конечное положение C. Найти проекции перемещения оси декартовой системы координат, модуль перемещения и пройденный точкой путь.

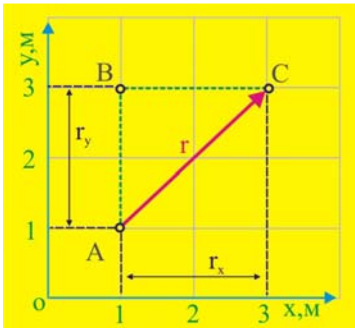

Рис. 1.45. Перемещение точки

Решение

1. Определим по данным рисунка проекции вектора перемещения

$$r_x = 2\,\text{м};\quad r_y = 2\,\text{м}.$$

2. Найдём модуль вектора перемещения, как длину гипотенузы прямоугольного треугольника ΔABC

$$|\vec{r}| = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}82\,\text{м}.$$

3. Пройденный точкой путь определится в виде суммы

$$s = AB + BC = 4\,\text{м}.$$

1.46. Две точки A и B движутся по траекториям, показанным на рис. 1.46. Найти координаты пересечения траекторий. При каком условии возможна встреча движущихся точек?

Решение

1. Пересечение траекторий точек произойдёт при одновременном значении координат

$$(x = 2\,\text{м};\quad y = 2\,\text{м}).$$

2. Столкновение точек, таким образом, будет возможным, если отрезки пути BC и AB будут пройдены за одинаковые промежутки времени.

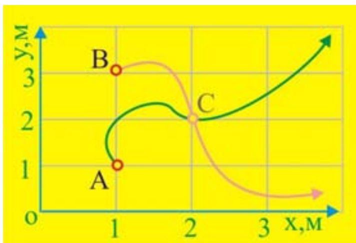

Рис. 1.46. Пересечение траекторий

Прямолинейное равномерное движение

1.47. Задано уравнение движения материальной точки вдоль горизонтальной оси

$$x = 5t\,.$$

Определить уравнение скорости точки, путь, пройденный в течение первых двух секунд. Представить зависимости пути и скорости от времени графически.

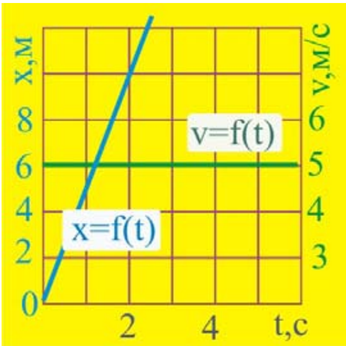

Рис. 1.47. Зависимость пути и скорости от времени

Решение

1. Уравнение скорости определиться путём дифференцирования по времени заданного уравнения движения

$$v = \frac{dx}{dt} = 5\frac{м}{с};$$

2. Путь, пройденный исследуемой точкой в первые две секунды, определяется путём подстановки заданного времени t = 2с в уравнение движения

$$s = 5t = 5 \cdot 2 = 10\,м\,.$$

3. Зависимость пройденного пути и скорости от времени приведена на рис. 1.47.

1.48. Материальная точка движется прямолинейно в соответствии с уравнением

$$x = 10t\,.$$

Определить начальную координату точки, координату по прошествии t_1 = 10 с движения. Изобразить графически траекторию и простроить зависимости $v_x(t)$ и $x(t)$. По графикам определить момент времени t_2, соответствующий координате x_2 = 80 м.

Решение

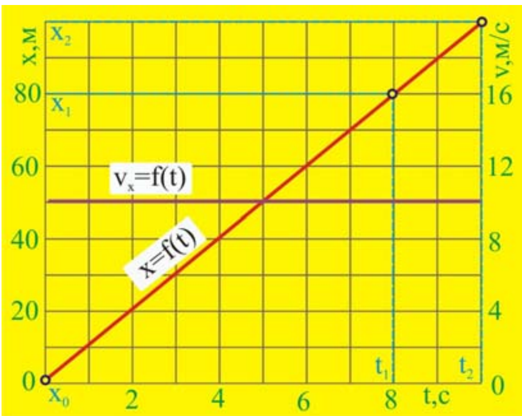

Рис. 1.48. Зависимость координат и скорости от времени

1. Начальную координату точки определим положив t = 0, т.е. $x_0 = 0$.

2. Координата тоски спустя t_1 = 10 с после начала движения

$$x_1 = 10t_1 = 10 \cdot 10 = 100\,м\,.$$

3. Запишем уравнение скорости движения точки

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 10\frac{м}{с},$$

т.е. точка движется вдоль оси x с постоянной скоростью v_x = 10 м/с.

4. Построим графики зависимости координат и скорости от времени и по графику определим время t_2 = 8 с, и координату x_1 = 100 м.

1.49. Известно, что некая точка, движущаяся равномерно, в начальный момент времени имела координату x_0 = 10 м, а через Δt = 2 мин её координата стала x_2 = 250 м. Определить скорость движения точки и записать закон её движения.

Решение

1. Определим постоянную величину скорости, поделив перемещение точки на время, за которое это перемещение произошло

$$v_x = \frac{x_2 - x_0}{\Delta t} = \frac{250-10}{120} = 2\frac{м}{с}.$$

2. Запишем уравнение движения с учётом начального положения точки при t = 0

$$x(t) = 10 + 2t.$$

1.50. Материальная точка, движущаяся равномерно вдоль оси X в момент времени t_1 = 1 с имела координату x_1 = 5 м, а к моменту времени t_2 = 5 с её координата стала равной x_2 = – 3 м. Определить скорость движения точки, записать уравнение движения. Найти перемещение и путь, проходимый за любые Δt = 2 с движения.

Решение

1. Найдём скорость точки как отношение перемещения к промежутку времени

$$v_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-3)-5}{5-1} = -\frac{8}{4} = -2\frac{м}{с},$$

знак «минус» указывает на то, что точка движется в направлении противоположном оси X.

2. Определим начальную координату точки

$$x_0 = x_1 + v_x t_1 = 5 + 2 = 7\ м$$

3. Запишем уравнение движения с учётом начального положения точки и направления её скорости

$$x(t) = 7 - 2t.$$

4. Определим пройденный точкой путь за Δt = 2 с

$$s = v_x \Delta t = -4\,м.$$

5. Найдем модуль вектора перемещения

$$|\vec{r}| = |v_x|\Delta t = 4\ м\cdot$$

1.51. Задан закон равномерного прямолинейного движения материальной точки

$$x(t) = 2t - 1.$$

Определить начальное положение точки, её координату в момент времени t_1 = 1 с, путь пройденный точкой за Δt = 1 с. Построить траекторию движения точки и графики зависимости от времени координаты, пути и скорости точки

Решение

1. Определим начальное положение точки, положив в уравнении движения t = 0

$$x_0 = -1\,м.$$

2. Определим координату точки для момента времени t_1 = 1 с

$$x_1 = 2t_1 - 1 = 2 - 1 = 1\,м.$$

3. Запишем уравнение скорости и найдём её величину

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\frac{м}{с}.$$

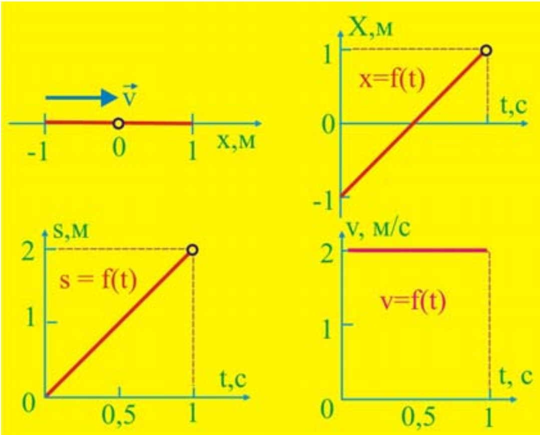

Рис. 1.51. Графические параметры движения

4. Определим путь пройденный точкой время Δt

$$s = v_x \Delta t = 2 \cdot 1 = 2\text{ м}.$$

5. Построим траекторию в виде прямой линии совпадающей с осью X и зависимости пути, координаты и скорости от времени (рис. 1.51).

1.52. Вдоль оси X движутся две материальные точки в соответствии с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 10 + 2t; \\ x_2 &= 4 + 5t. \end{aligned}\right\}$$

В какой момент времени точки столкнуться? Решить задачу аналитически и графически.

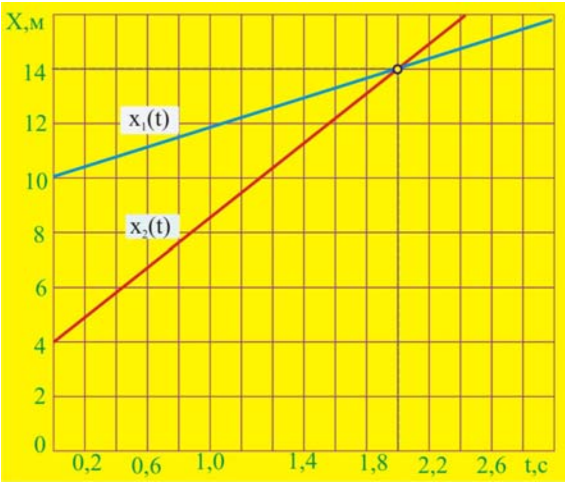

Рис. 1.52. Движение двух точек

Решение

1. Для определения времени встречи частиц аналитическим способом необходимо при рассмотрении заданных уравнений движения определить условие встречи $x_1 = x_2$, т.е.

$$10 + 2t = 4 + 5t,$$

откуда

$$t_i = 2\text{ с}.$$

2. Опять же из уравнений движения найдём начальные положения точек, положив в уравнениях $t = 0$

$$x_{1(0)} = 10\text{ м}; \quad x_{2(0)} = 4\text{ м}.$$

3. Построим графики зависимостей $x_1 = f(t)$ и $x_2 = f(t)$, которые приведены на рис. 1.52. Пересечение графиков соответствует их одновременное пребывание на расстоянии 14 м от начала выбранной системы отсчёта, которое произойдёт через 2 с после начала движения.

1.53. Из пункта А в пункт В стартовал автомобиль с постоянной скоростью v_1 = 80 км/час. Спустя Δt = 15 мин из пункта В навстречу автомобиль выдвинулся велосипедист и покатил с постоянной скоростью v_2 = 20 км/час. Составить уравнения движения автомобиля и велосипедиста, приняв за начало системы отсчёта пункт А, а за начальное время – старт автомобиля. Аналитически и графически определить время и место встречи автомобиля и велосипеда, если расстояние АВ = L = 55 км

Решение

1. Запишем уравнение движения автомобиля

$$x_1(t) = v_1 t = 80t.$$

2. Определим расстояние пройденное велосипедистом

$$s_2 = v_2(t - \Delta t)\cdot$$

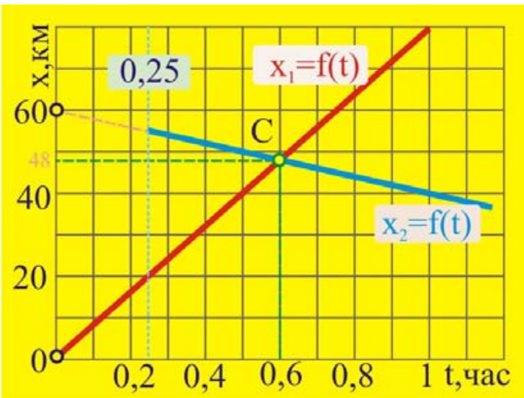

Рис. 1.53. Движение автомобиля и велосипеда

3. Уравнение движения велосипедиста относительно заданного по условию задачи начала системы отсчёта (точка А)

$$x_2(t) = L - v_2(t - \Delta t) = 60 - 20t.$$

4. Время встречи определим из условия равенства координат автомобиля и велосипеда

$$x_1(t_B) = x_2(t_B); \quad \Rightarrow \quad 80t_B = 60 - 20t_B;$$

$$100t_B = 60; \quad t_B = 0{,}6\text{ часа}.$$

5. Определим место встречи в виде расстояния от пункта А

$$x_B = v_1 t_B = 80 \cdot 0{,}6 = 48\,\text{км}$$

6. На рис. 1.53 приведены графические интерпретации уравнений движения. Точка пересечения прямых, соответствующих $x_1(t)$ и $x_2(t)$ позволяет установить время и место встречи, достаточно из точки C опустить перпендикуляры на оси.

1.54. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно L, одновременно навстречу друг другу начали двигаться два тела со с постоянными скоростями v_1 и v_2. Определить время и место их встречи аналитически и графически.

Решение

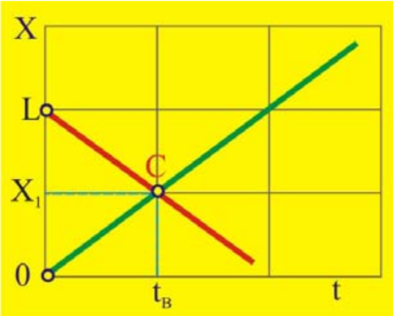

Рис. 1.54. Время и место встречи

1. Время встречи тел, которые движутся встречно, определится уравнением

$$t_B = \frac{L}{v_1 + v_2}$$

2. Расстояние от пункта A до точки встречи тел

$$X_1 = v_1 t_B = \frac{v_1 L}{v_1 + v_2}.$$

3. Графическое решение задачи представлено на рис. 1.54.

1.55. Координата движущейся точки вдоль горизонтальной оси изменяется в соответствии с приведённым графиком. Построить графики зависимости скорости и пути от времени. Найти перемещение тела за первые t_1 = 3 с движения.

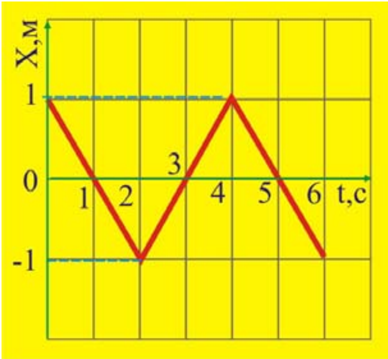

Рис. 1.55. График движения

Решение

1. Проанализируем, заданное графически движение. В период времени 0 – 2 с точка начинает равномерное движение из начального положения x_0 = 1 м, перемещаясь в направлении, противоположном оси X. В конце второй секунды точка начинает двигаться в положительном направлении оси. Скорость в первые две секунды имеет отрицательный знак, а в течение 2 – 4 с скорость положительна, как показано на рисунке v = f(t).

2. Скорость движения точки составляет -1 м/с, поэтому уравнение движение в течение первых двух секунд будет иметь вид:

$$x = 1 - t.$$

3. На втором участке 2 – 4 с скорость равна 1 м/с. Этот участок движения начинается после того как точка проделала путь в 2 м, т.е. уравнение движения представится как:

$$x = t - 3.$$

4. На третьем участке движения 4 – 6 с скорость снова станет равной v = – 1 м/с, уравнение движения примет вид:

$$x = 5 - t.$$

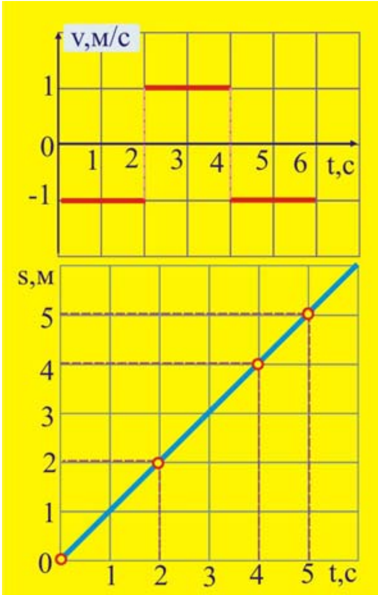

Рис. 1.55. Параметры движения

5. За первые t_1 = 3 с движения точка совершит перемещение:

$$|\vec{r}_{1-3}| = |\vec{v}| \cdot t_1 = 3\,\text{м}.$$

Рис. 1.56. График движения

1.56. Изменение координаты частицы во времени показано на рис. 1.56. Какой это тип движения? Записать уравнение движения и построить зависимость скорости от времени v = f(t). Нарисовать траекторию движения частицы. Построить график зависимости пути от времени s = f(t). Найти перемещение и путь частицы за интервал времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с.

Решение

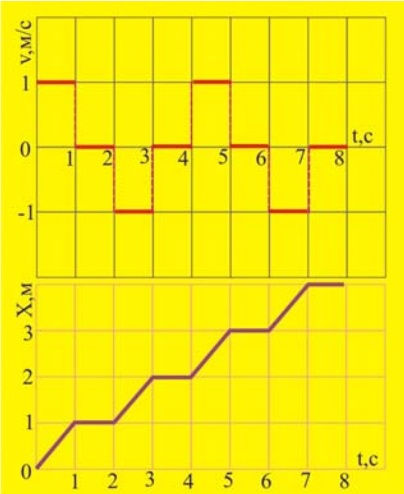

Рис. 1.56. Параметры движения

1. Судя по заданной графической зависимости $x = f(t)$, движение носит циклический характер с периодом T = 4 с.

2. В период времени $0 \le t < 1c$ движение равномерное со скоростью v_x = 1 м/с, уравнение движения

$$x(t) = 1 + t .$$

3. В период времени $1 \le t < 2c$ частица находится в покое $v_x = 0$.

4. В период времени $2 \le t < 3c$ частица начинает двигаться в обратном направлении со скоростью $v_x = -1$ м/с.

5. Перемещение частицы за интервал времени от t_1 = 2 с до t_2 = 5 с, судя по заданному графику будет нулевым. При t_1 = 2 с частица характеризуется координатой x_1 = 2 м, при t_2 = 5 с координата так же будет равна x_2 = 2 м.

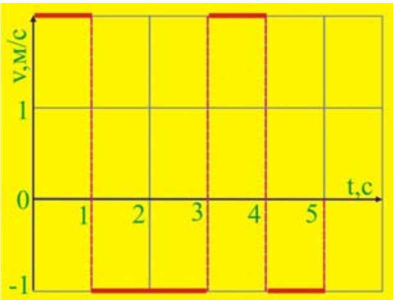

Рис. 1.57. Скорость частицы

1.57. На рис. 1.57 задана проекция скорости частицы, как функция времени. В начальный момент времени t_0 = 0 частица занимает положение x_0 = – 1 м. Записать уравнение движения частицы. Построить зависимость пути и координаты от времени.

Решение

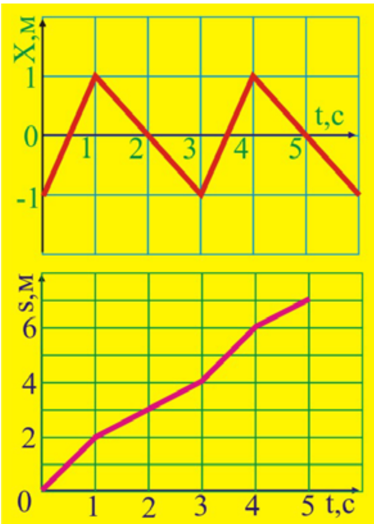

Рис. 1.57.1. Путь и координата

1. В период времени $0 < t < 1c$ частица движется равномерно с положительной скоростью v = 2 м/с, уравнение движения

$$x(t) = -1 + 2t .$$

2. . В период времени $1 < t < 3c$ частица движется со скоростью v = 1 м/с, уравнение движения

$$x(t) = 2 - t .$$

3. В период времени $3 < t < 4c$ движение будет так же равномерным со скоростью v = 2 м/с, уравнение движения

$$x(t) = 2t - 7 .$$

4. В период времени $4 < t < 5c$ движение равномерное со скоростью v = – 1 м/с, уравнение движения

$$x(t) = 5 - t .$$

5. На рис. 1.57.1 приведены зависимости координаты и пройденного пути в функции времени.

Относительность движения

1.58. Мимо железнодорожной платформы движется пассажирский поезд, в одном из вагонов которого у окна сидит пассажир. В каком механическом состоянии относительно пассажира находятся: книга, лежащая на столе, пол вагона, железнодорожная платформа, наблюдатель на платформе?

Решение

1. При рассмотрении механического состояния заданных в условии задачи тел целесообразно ввести в рассмотрение две системы отсчёта: неподвижную систему отсчёта (НСК), связанную с платформой и подвижную систему координат (ПСК), связанную с движущимся поездом, т.е. с пассажиром.

2. Книга и пол движущегося вагона относительно ПСК находятся в состоянии покоя, а платформа и наблюдатель в состоянии движения.

1.59. Изобразить траекторию движения точки на ободе колеса автомобиля при его движении относительно: кузова и земли. Зависит ли вид траектории от выбора системы отсчёта? Зависят ли путь и перемещение от выбора системы отсчёта?

Решение

1. Колесо движущегося горизонтально автомобиля совершает, так называемое, плоское движение. Каждая точка колеса, одновременно вращается и перемещается поступательно. Другими словами сложное движение колеса можно разложить на два более простых: вращение вокруг собственной оси и поступательное прямолинейное движение вместе с центром колеса.

2. Если систему подвижных координат с движущимся автомобилем (кузовом), то начало системы отсчёта можно совместить с центром вращающегося колеса, траектория точек колеса будет представлять собой окружность.

3. Рассмотрение движения исследуемой точки колеса относительно неподвижной системы координат, связанных с землёй, позволяет установить, что общая точка колеса и поверхности в данный момент времени остаётся неподвижной, через неё перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 1.59) проходит мгновенная ось вращения, вокруг которой движутся все точки колеса. Траекториями движения точек, принадлежащих колесу – будут циклоиды.

Рис. 1.59. Траектория точки колеса относительно земли

4. Путь зависит от выбора системы отсчёта, а перемещение – не зависит.

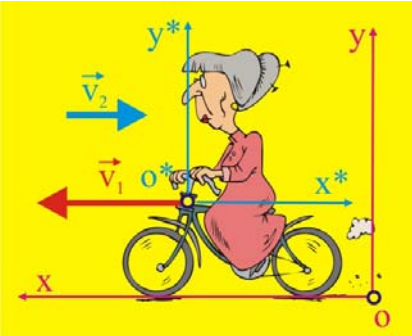

Рис. 1.60. Движение против ветра

1.60. Скорость велосипедиста равна v_1 = 10 м/с, а скорость встречного ветра составляет v_2 = 4 м/с. Какова скорость ветра относительно велосипеда? Как изменится эта скорость в случае попутного ветра?

Решение

1. Свяжем НСК с поверхностью земли, а ПСК с велосипедом. В этом случае, чтобы получить скорость ветра относительно НСК (велосипеда) модули векторов скоростей нужно сложить

$$v_3 = v_1 + v_2 = 14\,М \backslash с\,.$$

2. В случае попутного ветра для вычисления скорости ветра относительно велосипеда из скорости велосипеда необходимо вычесть скорость ветра

$$v_4 = v_1 - v_2 = 6\,м/с\,\cdot$$

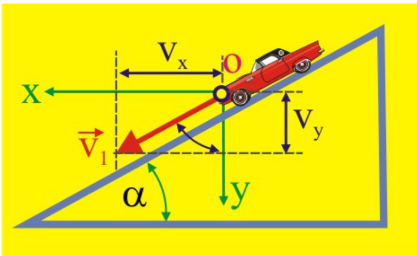

Рис. 1.61. Проекции скорости

1.61. Игрушечный автомобильчик скатывается с наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α = 30^0 с постоянной скоростью v = 1 м/с. Определить проекции скорости машинки на оси декартовой системы координат, т.е. вертикальную и горизонтальную составляющие вектора скорости.

Решение

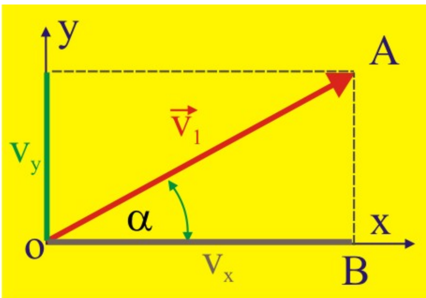

Рис. 1.61.1. Проекции вектора

1. Проекции вектора на оси декартовой системы координат определяются из тригонометрических соображений. Рассмотрим прямоугольный треугольник OAB, гипотенуза которого представляет собой модуль вектора, а катеты его проекции на оси (рис. 1.61.1). Из определения синуса и косинуса угла следует

$$\sin\alpha = \frac{v_y}{|\vec{v}_1|}; \quad \cos\alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}_1|},$$

откуда следует, что

$$v_y = |\vec{v}_1|\sin\alpha = 1\cdot 0{,}5 = 0{,}5\,м/с\,,$$

$$v_x = |\vec{v}_1|\cos\alpha = 1\cdot 0{,}87 = 0{,}87\,м/с\,.$$

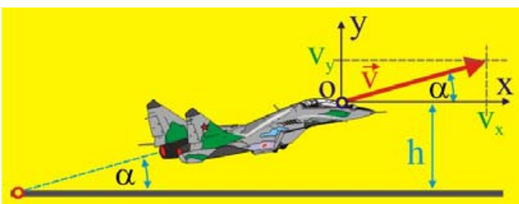

Рис. 1.62. Взлёт самолёта

1.62. Самолёт взлетает относительно горизонтальной полосы под углом α = 20^0 с постоянной скоростью v = 216 км/час. Найти вертикальную и горизонтальную составляющие скорости. На какую высоту взлетит самолёт за t = 1 с полёта.

Решение

1. Определим горизонтальную проекцию вектора скорости самолёта

$$v_x = |\vec{v}|\cos\alpha = 216\cdot\cos 20^0 \approx 216\cdot 0{,}94 \approx 203\,км/час\,.$$

2. Определим вертикальную проекцию вектора скорости самолёта

$$v_y = |\vec{v}|\sin\alpha = 216\cdot\sin 20^0 \approx 73{,}9\,км/час\,.$$

3. Высота подъёма самолёта относительно взлётной полосы определится в виде произведения вертикальной составляющей скорости на время полёта. Поскольку вре-

мя t задано в секундах, то скорость необходимо перемести в м/с – 73,9 /3,6 = 20,5 м/с

$$h = v_{y}\cdot t = 20{,}5\cdot 1 = 20{,}5\,\text{м}\,.$$

1.63. Воздушный шар поднялся на высоту h = 800 м, при этом горизонтальным ветром его отнесло от точки старта на расстояние s = 600 м. Найти путь, проделанный шаром, считая его движение равномерным и прямолинейным.

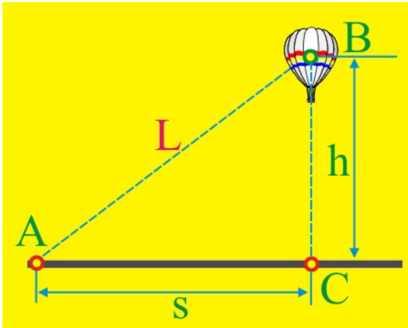

Рис. 1.63. Полёт воздушного шара

Решение

1. Путь, проделанный шаром, будет равен гипотенузе прямоугольного треугольника, построенного на дальности полёта s и высоте подъёма h, следовательно:

$$L = \sqrt{s^2 + h^2} = \sqrt{600^2 + 800^2} = 1000\,\text{м} = 1\,\text{км}\,.$$

1.64. По двум параллельным путям движутся два поезда: товарный, длина которого равна L_1 = 630 м идёт с неизменной скоростью v_1 = 48 км/час, и пассажирский длиной L_2 = 120 м движется с постоянной скоростью v_2 = 102 км/час. Какова относительная скорость движения поездов в случае встречного и попутного движения? В течение какого времени один поезд проходит мимо другого?

Решение

1. Относительная скорость поездов в случае встречного движения

$$v_{(r)1} = v_1 + v_2 = 150\,\text{км/час} = 41{,}7\,\text{м/с}\,.$$

2. Относительная скорость при попутном движении, пассажирский поезд обгоняет товарняк

$$v_{(r)2} = v_2 - v_1 = 54\,\text{км/час} = 15\,\text{м/с}\,.$$

3. Время прохождения поездов относительно друг друга при встречном и попутном движении

$$\tau_1 = \frac{L_1 + L_2}{v_1 + v_2} = \frac{750}{41{,}7} = 18\,\text{с}\,,$$

$$\tau_1 = \frac{L_1 + L_2}{v_2 - v_1} = \frac{750}{15} = 50\,\text{с}\,.$$

1.65. Расстояние между пунктами A и B по течению реки катер проходит за время t_1 = 3 часа, обратный путь занимает время t_2 = 6 часов. Какое время τ потребуется катеру на прохождение расстояния AB по течению реки с выключенным мотором? Скорость катера относительно реки считать постоянной.

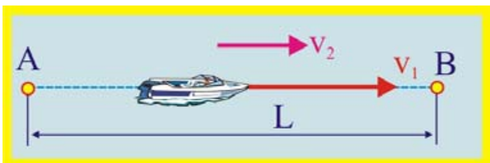

Рис. 1. 65. Катер на реке

Решение

1. Запишем уравнения движения катера по течению, против течения и сплавом по реке

$$\left.\begin{aligned} L &= (v_1 + v_2)t_1;\\ L &= (v_1 - v_2)t_2\\ L &= v_2\tau. \end{aligned}\right\}$$

2. Решая совместно полученную систему уравнений, получим скорость течения реки. Вначале из первого уравнения выразим скорость v_1

$$v_1 = \frac{L - v_2 t_1}{t_1},$$

Подставим полученное значение v_1 и значение L из третьего уравнения во второе уравнение системы

$$v_2\tau = \left(\frac{v_2\tau - 2v_2 t_1}{t_1}\right) t_2,$$

или

$$\frac{v_2\tau}{t_2} = \frac{v_2(\tau - 2t_1)}{t_1},$$

разрешая полученное уравнение относительно τ, окончательно получим:

$$\tau = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 12\,\text{час}.$$

Рис. 1.66. Движение катера и воды

1.66. На рис. 1.66 показаны графики движения катера в стоячей воде (1) и движения воды в реке (2). Построить график движения по течению реки и против течения. Определить по графикам скорость катера, в случае его движения по течению и против течения.

Решение

1. По заданным графикам движения определим скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки $v = \Delta s/\Delta t$, положив интервал времени, равным $\Delta t = 3$ час. Скорость катера в спокойной воде

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{60}{3} = 20\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

Скорость течения реки

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{15}{3} = 5\frac{\text{км}}{\text{час}}$$

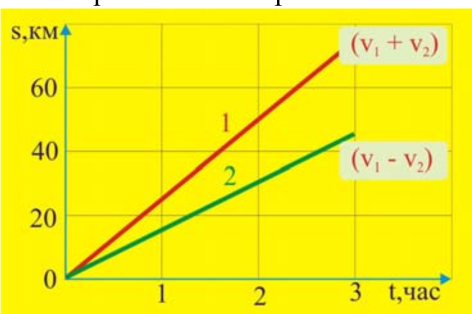

Рис. 1.66.1. Движение катера по реке

2. Скорость катера по течению реки и против течения будет равна

$$v_3 = v_1 + v_2 = 25\,\text{км/час},$$

$$v_4 = v_1 - v_2 = 15\,\text{км/час}.$$

3. На рис. 1.66.1 приведены графики движения по которым искомые скорости легко вычисляются графически.

1.67. При скорости v_1 = 90 км/час легковой автомобиль начинает обгон трейлера, движущегося со скоростью v_2 = 72 км/час. Обгон начинается когда расстояние между автомобилями равно s_1 = 20 м, легковушка возвращается после обгона в свой ряд, когда удаляется от трейлера на расстояние s_2 = 15 м. Определить время обгона, если длина легкового автомобиля составляет L_1 = 4 м, а длина трейлера – L_2 = 16 м

Решение

1.Поскольку автомобили движутся в одном направлении (рис. 1.67), то их относительная скорость определится как

$$v_3 = v_1 - v_2 = 18\,км/час = 5\,м/с.$$

2. В общей сложности маневр обгона займёт расстояние

$$s_3 = L_1 + L_2 + s_1 + s_2 = 55\,м.$$

3. Время, необходимое для обгона

$$\Delta t = \frac{s_3}{v_3} = \frac{L_1 + L_2 + s_1 + s_2}{v_1 - v_2} = 11\ с.$$

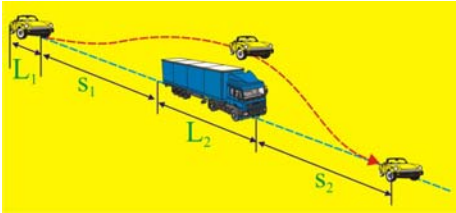

Рис. 1.67. Обгон

1.68. Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору метрополитена за время t_1 = 3 мин, а по движущемуся вверх эскалатору за время t_2 = 2 мин. Сможет ли пассажир подняться по эскалатору, движущемуся с прежней скоростью вниз? За какое время это он может сделать?

Решение

1. Запишем уравнения движения пассажира в разных вариантах движения эскалатора и образуем систему уравнений, приняв следующие обозначения: s – длина эскалатора, v_1 – скорость пассажира, v_2 – скорость эскалатора, t_3 – время подъема пассажира по встречно идущему эскалатору

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{s}{t_1}; \\ v_1 + v_2 &= \frac{s}{t_2}; \\ v_1 - v_2 &= \frac{s}{t_3}. \end{aligned}\right\}$$

2. Из второго уравнения системы найдём скорость v_2

$$v_2 = \frac{s}{t_2} - v_1 = \frac{s}{t_2} - \frac{s}{t_1}.$$

3. Подставим далее значение v_1 из первого уравнения системы и полученное значение v_2 в третье уравнение

$$\frac{s}{t_1} - \frac{s(t_1 - t_2)}{t_2 t_1} = \frac{s}{t_3},$$

откуда

$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_2 - t_1} = \frac{2 \cdot 3}{4 - 3} = 6\,мин.$$

1.69. Эскалатор метрополитена спускает идущего по нему человека за время t_1= 1 мин. Если человек будет двигаться в два раза быстрее относительно эскалатора, то он спустится за время t_2 = 45 с. Сколько времени t_3 будет спускаться человек, стоящий неподвижно?

Решение

1. Приняв длину эскалатора за s, скорость идущего человека – за v_1, скорость эскалатора – за v_2 запишем три уравнения движения

$$\left.v_1 + v_2 = \frac{s}{t_1};\quad 2v_1 + v_2 = \frac{s}{t_2};\quad v_2 = \frac{s}{t_3}.\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения скорость v_1, с учётом значения скорости v_2 из третьего уравнения

$$v_1 = \frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_3}.$$

3. Подставим значения v_1 и v_2 во второе уравнение системы

$$2\left(\frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_3}\right) + \frac{s}{t_3} = \frac{s}{t_2}.$$

4. Решая последнее уравнение относительно искомого времени t_3, получим

$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_2 - t_1} = \frac{60 \cdot 45}{90 - 45} = 90\,\text{с}.$$

1.70. Нарушая правила, человек бежит по эскалатору. В первую пробежку он насчитал n_1 = 50 ступенек, во время второго забега по тому же эскалатору с втрое большей скоростью, он насчитал уже n_2 = 75 ступенек. Сколько ступенек он насчитал на неподвижном эскалаторе?

Решение

1. Пусть v_1 – скорость эскалатора, L – его длина, n – число ступенек неподвижного механизма. На единицу длины эскалатора приходится n/L ступенек. Если человек идёт со скоростью v_2 относительно эскалатора, то время его пребывания на эскалаторе составит

$$t_1 = \frac{L}{v_1 + v_2},$$

а путь, пройденный по эскалатору

$$s_1 = \frac{v_2 L}{v_1 + v_2},$$

при этом человек насчитает на эскалаторе следующее число ступенек

$$n_1 = \frac{v_2 L}{v_1 + v_2}\frac{n}{L}.$$

2. Во втором случае, увеличив втрое скорость, человек насчитает ступенек n_2 штук

$$n_2 = \frac{3v_2 L}{v_1 + 3v_2}\frac{n}{L}$$

3. Образуем из двух полученных уравнений систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_2}{v_1 + v_2} n = n_1; \\ \frac{3v_2}{v_1 + 3v_2} n = n_2. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 + \frac{v_1}{v_2} = \frac{n}{n_1}; \\ 1 + \frac{1}{3}\frac{v_1}{v_2} = \frac{n}{n_2}. \end{aligned}\right\}$$

4. Выразив из первого уравнения системы отношение скоростей и подставив во вторе уравнение, получим

$$n = \frac{2n_1 n_2}{3n_1 - n_2} = \frac{100 \cdot 75}{150 - 75} = 100.$$

1.71. Два поезда движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями v_1 = 36 км/час и v_2 = 54 км/час. Пассажир первого поезда обнаружил, что второй поезд промелькнул мимо него за t = 6 с. Какова длина второго поезда?

Решение

1. Переведём скорости из км/час в м/с, потому что время задано в секундах

$$v_2 = 54/3{,}6 = 15\,\text{м/с}; \quad v_2 = 36/3{,}6 = 10\,\text{м/с}.$$

2. При встречном движении поездов их скорости будут складываться, поэтому длина проходящего мимо пассажира поезда определится как:

$$L = (v_1 + v_2)t = (15 + 10)6 = 150\,\text{м}.$$

1.72. Два человека одновременно вступают на эскалатор с противоположных сторон и движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями относительно эскалатора v = 2 м/с. На каком расстоянии от входа на эскалатор они встретятся, если длина эскалатора составляет L = 100 м, а его скорость u = 1,5 м/с?

Решение

1. Время движения до встречи первого человека, идущего в направлении движения эскалатора, на расстоянии L_1 от начала эскалатора определится как:

$$t = \frac{L_1}{v + u}.$$

2. Время движения до встречи второго человека, движущегося навстречу направления движения эскалатора:

$$t = \frac{L - L_1}{v - u}.$$

3. Приравнивая полученные уравнения и разрешая относительно L_1, получим

$$\frac{L_1}{v + u} = \frac{L - L_1}{v - u}; \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{v + u}{2v}L = \frac{3,5}{4}\cdot 100 = 87,5\,\text{м}.$$

1.73. Теплоход длиной L = 300 м движется прямолинейно по глади озера со скоростью v_1. Катер, имеющий скорость v_2 = 90 км/час проходит расстояние от носа до кормы движущегося теплохода и обратно за время t = 37,5 с. Какова скорость теплохода?

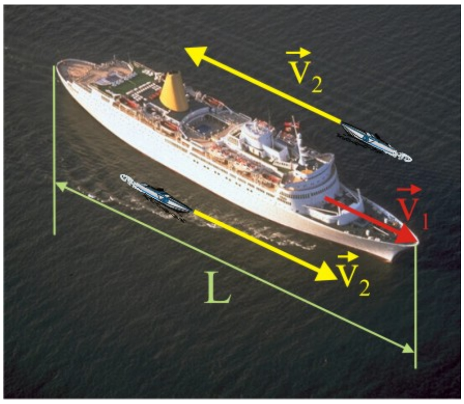

Рис. 1.73. Теплоход и катер

Решение

1. Запишем уравнение для общего времени движения катера вокруг теплохода

$$t = \frac{L}{v_2 + v_1} + \frac{L}{v_2 - v_1}.$$

2. Преобразуем полученное уравнение следующим образом

$$t = \frac{L(v_2 - v_1 + v_2 + v_1)}{(v_2 + v_1)(v_2 - v_1)} = \frac{2Lv_2}{v_2^2 - v_1^2}.$$

3. Разрешим последнее уравнение относительно искомой скорости v_1, переведя предварительно скорость катера в м/с (90 км/час = 25 м/с)

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 - \frac{2v_2L}{t}} = \sqrt{625 - \frac{50\cdot 300}{37,5}} = 15\frac{\text{м}}{\text{с}} = 54\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

1.74. Пролетая над пунктом А, вертолёт догнал воздушный шар, который сносило ветром в направлении полёта. Через полчаса вертолёт повернул обратно, и встретил шар на расстоянии L = 30 км от пункта А. Чему равна скорость ветра v, если скорость вертолёта во время всего полёта оставалась постоянной.

Решение

1. Подвижную систему координат свяжем с шаром, перемещающимся со скоростью ветра. В этой системе отсчёта расставание вертолёта и шара происходит в одной точке. Объекты «расстались» в выбранной системе отсчёта на время 2t, за которое подвижная система координат переместилась на расстояние L, таким образом

$$v2t = s,$$

откуда

$$v = \frac{s}{2t} = \frac{30}{2 \cdot 0{,}5} = 30\frac{км}{час}.$$

1.75. Два спортсмена тренируются на беговой дорожке длиной L = 400 м. Первый бегун проходит круг за t_1 = 50 с, а второй – за t_2 = 60 с. Сколько раз спортсмены встретятся при забеге на L_0 = 4 км при одновременном старте и беге в одном направлении.

Решение

1. Определим скорости бега спортсменов

$$v_1 = \frac{L}{t_1} = 8\frac{м}{с}; \quad v_2 = \frac{L}{t_2} = 6{,}7\frac{м}{с}.$$

2. Найдём время пробега заданной дистанции L_0

$$t_1 = \frac{L_0}{v_1} = 500\,с; \quad t_2 = \frac{L_0}{v_2} = 597\,с.$$

3. Разница времени прохождения заданной дистанции

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 97\,с.$$

4. Расстояния, пробегаемые спортсменами за время Δt

$$s_1 = v_1\Delta t = 776\,м; \quad s_2 = v_2\Delta t = 650\,м.$$

5. Разность проходимых дистанций

$$\Delta s = s_1 - s_2 = 126\,м$$

6. Поскольку $\Delta s < L$, то первый спортсмен обгонит второго на заданной дистанции только один раз.

1.76. Ведро воды выставлено под вертикальный дождь. Как изменится скорость наполнения ведра, если подует ветер?

Решение

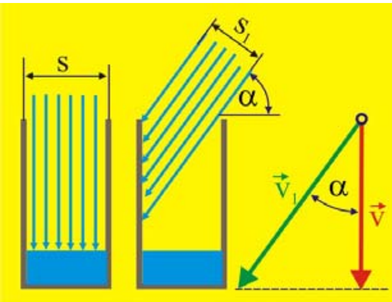

Рис. 1.76. Дождь и ведро

1. Масса жидкости, попадающей в ведро в единицу времени не изменится, потому что, несмотря на уменьшение сечения потока

$$s_1 = s\cos\alpha,$$

скорость капель возрастёт (рис. 1.76)

$$v_1 = \frac{v}{\cos\alpha}.$$

Другими словами, скорость наполнения ведра зависит только от вертикальной составляющей скорости дождевых капель, величину которой ветер, по известным причинам изменить не может.

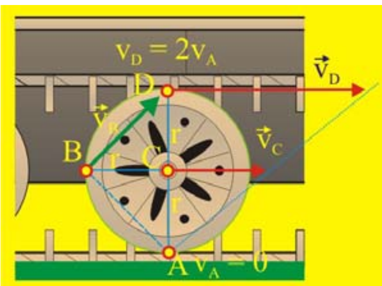

Рис. 1.77. Каток гусеницы

1.77. Танк движется прямолинейно со скоростью v = 72 км/час. С какими скоростями относительно земли движутся верхние v_B и нижние v_H части гусеницы танка? Какую скорость v_1 имеют части гусениц, вертикальные к поверхности земли?

Решение

1. Ответы на поставленные вопросы даёт рассмотрение плоского движения одного из приводных

катков танковой гусеницы. Центр катка (рис. 1.77) движется поступательно, оставаясь, всё время на расстоянии r от поверхности земли. Скорость центра катка определится как

$$v_C = \omega r,$$

где $\omega = v/r$ – угловая скорость вращения катка радиусом r. Скорость точка D, т.е. верхней части гусеницы определится как

$$v_D = \omega 2r = 2v.$$

2. В данный момент времени точка катка А является общей между неподвижной землёй и вращающимся катком, поэтому скорость этой точки равна нулю $v_A = 0$.

3. Скорость точки В, т.е. вертикально движущейся части гусеницы определится как

$$v_B = \omega AB = \omega\sqrt{r^2 + r^2} = \omega r\sqrt{2} = v\sqrt{2}.$$

1.78. Капли дождя на окнах неподвижного трамвая оставляют полосы, наклонённые под углом α к вертикали. При движении трамвая с постоянной скоростью v полосы становятся вертикальными. Оценить скорость капель дождя в безветренную погоду.

Решение

1. Поскольку при движении трамвая кали оставляют вертикальные следы, значит скорости ветра и трамвая совпадают, т.е.

$$v_B = v.$$

2. Из рассмотрения треугольника скоростей (рис. 1.78) очевидно, что

$$v_K = v_B \mathrm{ctg}\alpha.$$

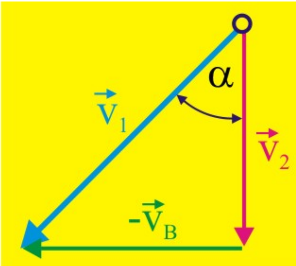

Рис. 1.78. Треугольник скоростей

1.79. Самолёт в безветренную погоду взлетает со скоростью v = 40 м/с под углом $\alpha = 10^0$ к горизонту. Внезапно начинает дуть горизонтальный встречный ветер со скоростью, равной u = 10 м/с. Какой стала скорость самолёта относительно земли и какой угол она составила с горизонтом?

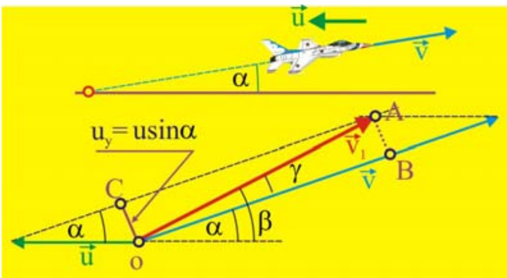

Рис. 1.79. Взлёт самолёта

Решение

1. Результирующая скорость самолёта и ветра v_1 (рис. 1.79) определится в виде диагонали параллелограмма построенного на векторах соответствующих скоростей

$$|v_1| = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos(180 - \alpha)} = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos\alpha}$$

$$|v_1| = \sqrt{40^2 + 10^2 - 2 \cdot 400 \cdot \cos 10^0} \approx 30{,}2\,\text{м/с}.$$

2. Для определения направления вектора скорости взлетающего против ветра самолёта необходимо, по сути, определить угол γ. Для этого найдём проекцию скорости ветра на перпендикуляр, восстановленный к вектору $\vec{v}$, т.е. длину отрезке oC = AB

$$u_\perp = u\sin\alpha.$$

3. Значение угла γ определим из прямоугольного треугольника ΔoAB

$$\sin\gamma = \frac{u\sin\alpha}{v_1}; \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\frac{u\sin\alpha}{v_1}$$

4. Искомый угол β определится в виде суммы

$$\beta = \alpha + \arcsin\frac{u\sin\alpha}{v_1} = 10 + \arcsin\frac{10 \cdot \sin 10^0}{30{,}2} \approx 13^0.$$

1.80. Корабль движется на запад со скоростью v. Ветер, при этом дует с юго-запада. Скорость ветра относительно корабля составляет u_0. Найти скорость ветра относительно земли.

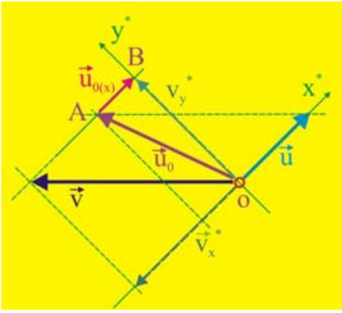

Рис. 1.80. Корабль и ветер

Решение

1. Совместим подвижную систему координат $\{ox^*y^*\}$ с направлением искомой величины, скорости ветра u и определим проекции вектора скорости корабля на оси этой системы отсчёта

$$\left.\begin{array}{l} v_x^* = v\cos\alpha; \\ v_y^* = v\sin\alpha. \end{array}\right\}$$

2. Скорость ветра измеренная на палубе корабля u_0 будет являться суммой скорости ветра и скорости корабля. Выразим далее из прямоугольного треугольника ΔoAB величину $u_{0(x)}$, которая является гипотенузой

$$u_{0(x)} = \sqrt{u_0^2 - v^2\sin^2\alpha}\ .$$

3. Скорость ветра представится в следующем виде

$$u = u_{0(x)} - v_x^* = \sqrt{u_0^2 - v^2\sin^2\alpha} - v\cos\alpha\ ,$$

4. С учётом того, что $\alpha = 45^0$, $\sin\alpha = \cos\alpha = 0,707$, последнее уравнение перепишется следующим образом

$$u = \sqrt{u_0^2 - 0,5v} - 0,707v\ .$$

1.81. Поезд движется строго на восток со скоростью v = 20 м/с. Пассажиру вертолёта, пролетающего над поездом, кажется, что поезд движется на север со скоростью u = 20 м/с. Найти скорость вертолёта и направление его полёта.

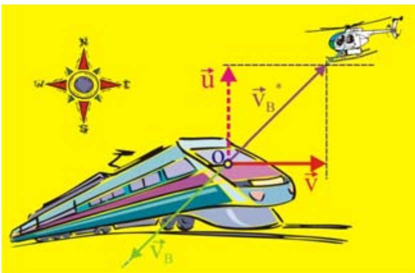

Рис. 1.81. Поезд и вертолёт

Решение

1. Построим векторы абсолютной и относительной скорости поезда $\vec{v}$ и $\vec{u}$.

2. На векторах $\vec{v}$ и $\vec{u}$ построим параллелограмм (в данном случае квадрат, потому что $|\vec{v}| = |\vec{u}|$) и найдём длину его диагонали

$$v_B^* = \sqrt{v^2 + u^2} = \sqrt{800} = 28,3\,\text{км/час}$$

3. Чтобы относительная скорость поезда была направлена на север, вертолёт должен лететь на юго-запад со скоростью 28,3 км/час.

1.82. Пловец намерился переплыть реку шириной h. Под каким углом α к направлению течения он должен плыть, чтобы затратить наименьшее время? Какой путь s он при этом проделает, если скорость течения реки u, а скорость пловца относительно воды v.

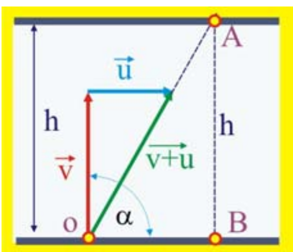

Рис. 1.82. Пловец и река

Решение

1. Наименьшее время пловец потратит в случае максимального значения суммы векторов скорости реки $\vec{u}$ и скорости пловца $\vec{v}$, это станет возможным, если пловец будет двигаться перпендикулярно противоположному берегу (рис. 1.82)

2. Определим результирующую скорость пловца относительно берега

$$\left|\vec{v}+\vec{u}\right| = \sqrt{v^2+u^2}\ .$$

3. Найдём время в течение которого пловец достигнет противоположного берега, перемещаясь со скоростью v в спокойной воде

$$\tau = \frac{h}{v}.$$

4. Путь, проделанный водой за время τ

$$oB = \ell = u\tau = \frac{uh}{v}.$$

5. Из прямоугольного треугольника ΔоАВ определим расстояние оА

$$s = \sqrt{h^2+\ell^2} = \sqrt{h^2+\frac{u^2h^2}{v^2}} = \sqrt{\frac{h^2v^2+h^2u^2}{v^2}} = \frac{h}{v}\sqrt{v^2+u^2}\ .$$

1.83. Катер движется из пункта A в пункт B вдоль прямой AB. Скорость течения реки равна u_0 = 2 м/с, скорость катера относительно неподвижной воды постоянна и равна v = 9 м/с. Расстояние AB = L = 1200 м. За какое время катер проплывёт это расстояние AB, если направление его движения относительно вектора скорости реки составляет угол $\alpha = 120^0$?

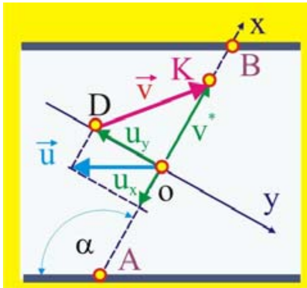

Рис. 1.83. Катер и река

Решение

1. Совместим ось OX системы декартовых координат с направлением движения катера в реке и определим проекции скорости реки на выбранные оси

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u\cos\alpha; \\ u_y &= u\sin\alpha. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим скорость катера на маршруте v^* из прямоугольного треугольника ODK

$$v^* = \sqrt{v^2 - u^2\sin^2\alpha}\ .$$

3. Скорость перемещения катера с учётом течения реки

$$v_0 = \sqrt{v^2 - u^2\sin^2\alpha} - u\cos\alpha\ .$$

4. Время прохождения маршрута AB

$$\tau = \frac{L}{\sqrt{v^2-u^2\sin^2\alpha}-u\cos\alpha} = \frac{1200}{\sqrt{81-4\cdot 0{,}75}+2\cdot 0{,}5} \approx 2\,\text{мин}\ .$$

1.84. Два лодочника должны переплыть реку из пункта A в пункт B. Один из них направляет лодку по прямой AB и, достигнув противоположного берега, оказывается в точке C. Для того, чтобы попасть в пункт B он движется против течения от с к B. Второй лодочник меж тем направляет лодку так, что сразу достигает противоположного берега в заданной точке B. Кто из них попадает в пункт B быстрее и во сколько раз? Скорость лодок относительно воды одинакова и равна v = 5,2 м/с. Скорость течения реки составляет u = 1,2 м/с.

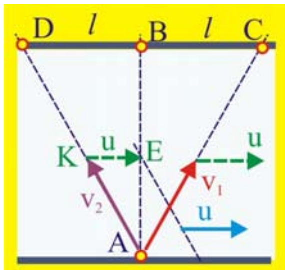

Рис. 1.84. Векторы скоростей

Решение

1. При движении лодки по прямой AB, т.е. перпендикулярно противоположному берегу, её скорость относительно земли будет определяться в виде суммы $v + u$ и будет направлена под углом α к прямой AB, при этом лодку снесёт по течению на расстояние ℓ. Это расстояние можно выразить из подобия треугольников ΔAKE подобен ΔADB

$$\frac{L}{\ell} = \frac{u}{v}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{Lu}{v},$$

где L – длина отрезка АВ, время переправы составит

$$t_1 = \frac{L}{v}.$$

2. Чтобы попасть прямо в точку В необходимо держать курс под углом α к отрезку АВ

$$\alpha = \arcsin\frac{u}{v} = \arcsin 0{,}231 \approx 13{,}5^0$$

3. При движении под углом α время переправы займёт время

$$t_2 = \frac{L}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

4. Отношение времён переправы лодок запишется как

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{v} = \frac{\sqrt{27 - 1{,}44}}{5{,}2} = 0{,}97,$$

переправа во втором случае занимает несколько больше времени, несмотря на то, что происходит по более короткому пути.

1.85. Два катера вышли одновременно из пунктов А и В, находящихся на противоположных сторонах реки. Катера двигались вдоль прямой АВ длина которой составляет L = 1000 м. Прямая АВ образует с вектором скорости течения реки u = 2 м/с угол α = 60^0. Скорости движения катеров относительно воды одинаковы. На каком расстоянии произойдёт встреча катеров от пункта В, если они встретились через τ = 180 с после начала движения?

Решение

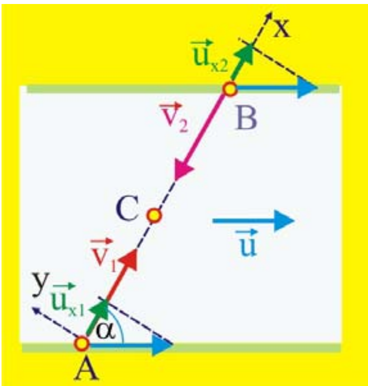

Рис. 1.85.1 Векторы скоростей

1. Выберем систему координат, так чтобы ось ОХ совпадала с направлением отрезка АВ (рис. 1.85.1), проекция скорости реки на это направление определится как

$$\left|\vec{u}_{x1}\right| = \left|\vec{u}_{x2}\right| = u\cos\alpha.$$

2. Как видно из приведенного векторного построения, в одном случае проекция вектора скорости реки на направление движения будет складываться со скоростью катера, а в другом – вычитаться, что говорит о том, что встреча катеров произойдёт не на расстоянии от L/2, а ближе к точке В

$$s = \frac{L}{2} - u_{x1}\tau = 500 - 2\cdot 0{,}5\cdot 180 = 320\,\text{м}.$$

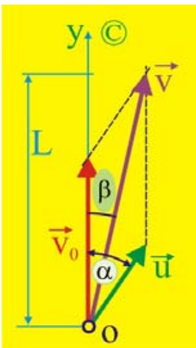

Рис. 1.86. Векторы скоростей

1.86. С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолёт, чтобы за τ = 2 часа полёта пролететь точно на север расстояние L = 200 км, если во время полёта постоянно дул северо-западный ветер, направленный под углом α = 30^0 к меридиану со скоростью u = 27 км/час?

Решение

1. Скорость самолёта в безветренную погоду

$$v_0 = \frac{L}{\tau} = 100\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

2. Найдём скорость самолёта с учётом ветрового воздействия

$$v=\sqrt{v_0^2+u^2+2v_0u\cos\alpha}=\sqrt{1\cdot10^4+729+4680}=124\frac{км}{час}.$$

3. Проекция вектора скорости на направление движения

$$u_v=u\cos\alpha=27\cdot0{,}5=13{,}5\frac{км}{час}$$

4. Направление полёта (угол β) определится как:

$$\beta=\arcsin\frac{u_v}{v}\approx6^0 15'.$$

1.87. Самолёт совершает прямой и обратный рейсы между двумя аэропортами. При каком направлении ветра относительно трассы время полёта будет максимальным? минимальным?

Решение

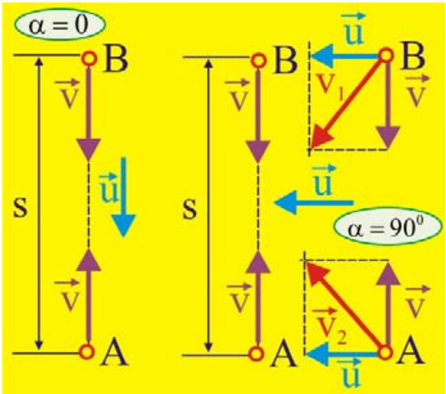

Рис. 1.87. Самолёт и ветер

1. Обозначим скорость самолёта как $\vec{v}$, а скорость ветра как $\vec{u}$, расстояние между аэропортами – s, α – угол между направлением полёта самолёта и вектором скорости ветра.

2. Рассмотрим случай, когда направление полёта на расстояние s совпадает с направлением ветра, и противоположно – когда самолёт возвращается, т.е. α = 0 и α = 180^0. Время движения при попутном t_1 и встречном t_2 ветре составит

$$t_1=\frac{s}{v+u};\quad t_2=\frac{s}{v-u},$$

3. Полное время движения самолёта туда и обратно при α = 0 и α = 180^0

$$\tau_1=t_1+t_2=\frac{s}{v+u}+\frac{s}{v-u}=\frac{2sv}{v^2-u^2}.$$

4. При ветре, дующем перпендикулярно направлению полёта (α = 90^0) результирующая скорость самолёта численно будет равна диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{v}$ и $\vec{u}$. Суммарное время движения составит

$$\tau_2=t_1+t_2=\frac{2s}{\sqrt{v^2-u^2\sin^2\alpha}+u\cos\alpha},$$

так как $\sin 90^0=1$, а $\cos 90^0=0$, то

$$\tau_2=\frac{2s}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

5. Из полученных уравнений видно, то $\tau_1>\tau_2$.

1.88. Турист, сплавляющийся по реке на байдарке, заметил, что поток несёт его к середине перегораживающего путь упавшему дереву в тот момент, когда расстояние от носа байдарки до дерева было s = 30 м. Оценить, под каким углом к вектору скорости течения реки нужно направить байдарку, чтобы обойти преграду, если скорость байдарки в стоячей воде v = 6 км/ч, скорость течения u = 3 км/час, а длина дерева L = 20 м.

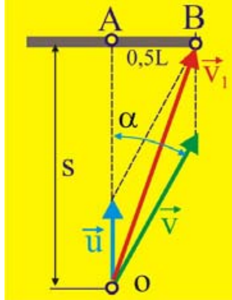

Рис. 1.88. Байдарка и дерево

Решение

1. Приведём заданные величины к единой системе измерения: v = 1,67 м/с, u = 0,835 м/с, L/2 = 10 м.

2. Определим расстояние OB = l, которое необходимо пройти байдарке, чтобы разминуться с крайней точкой дерева B, перегораживающему путь. Из прямоугольного треугольника OAB имеем:

$$\ell = \sqrt{s^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}\ .$$

2. Найдём время в течение которого река снесёт байдарку к середине дерева, в точку A, если турит будет сушить своё весло, т.е. плыть по течению

$$t = \frac{s}{u};$$

3. Определим величину $|\vec{v} + \vec{u}|$ как диагональ параллелограмма, построенного на векторах скоростей $\vec{v}$ и $\vec{u}$

$$v_1 = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha}\ .$$

4. Запишем уравнение движения байдарки в нужном направлении

$$v_1 t = \ell; \quad t\sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha} = \ell; \quad \frac{s}{u}\sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos\alpha} = \sqrt{\frac{L^2}{4} + s^2}\ .$$

5. Разрешим полученное уравнение относительно угла α

$$u^2 + v^2 + 2vu\cos\alpha = \frac{L^2u^2}{4s^2} + u^2,$$

$$\alpha = \arccos\left[\frac{1}{2vu}\left(\frac{L^2u^2}{4s^2} - v^2\right)\right] \approx 30^0\ .$$

1.89. Нерастяжимую нить, перекинутую через блок, с постоянной скоростью v тянут, перемещая горизонтально игрушечный автомобильчик. Какой будет скорость игрушки в момент, когда нить составляет с горизонтом угол α?

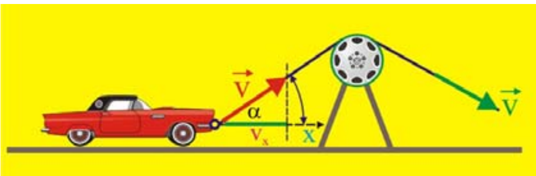

Рис. 1.89. Перемещение игрушки

Решение

1. Ели нить не растяжима, то все её сечения будут двигаться с одинаковыми скоростями, если конец нити станут перемещать с постоянной скоростью v, то и игрушка будет перемещаться горизонтально со скоростью, равной проекции вектора скорости на горизонтальное перемещение машинки

$$v_x = v\cos\alpha\ .$$

1.90. Два танка, движущиеся со скоростями $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$, образующими угол α, буксируют третий танк. Чему равен модуль результирующей скорости третьего танка, когда буксировочные тросы натянуты и параллельны векторам соответствующих скоростей.

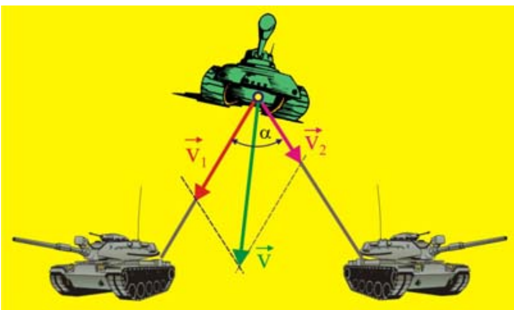

Рис. 1.90. Три танка

Решение

1. К транспортируемому танку будут одновременно приложены два вектора скорости, направленные под углом α друг другу. Модуль скорости можно определить по правилу параллелограмма, построенного на заданных векторах

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}\ .$$

Прямолинейное равнопеременное движение

1.91. Поезд, трогаясь с места, через t_1 = 10 с приобретает скорость v_1 = 0,6 м/с. За какое время после начала движения скорость поезда станет равной v_2 = 3 м/с? Движение поезда считать равноускоренным.

Решение

1. Определим величину ускорения поезда

$$v_1 = at_1; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_1}{t_1}.$$

2. Запишем уравнение скорости v_2

$$v_2 = at_2 = \frac{v_1}{t_1} t_2; \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1 \frac{v_2}{v_1} = \frac{10 \cdot 3}{0,6} = 50\,\text{с}.$$

1.92. Ускорение тела равно a = 1 м/с^2 и направлено противоположно вектору скорости. На какую величину изменится скорость тела за t = 2 с движения?

Решение

1. Движение равнозамедленное, за заданное время скорость уменьшится на величину

$$\Delta v = -at = -2\,\text{м/с}.$$

1.93. Тело движущееся со скоростью v_1 = 54 км/час, за t = 2 с уменьшило свою скорость до 7 м/с. Определить ускорение тела.

Решение

1. Перед тем, как определить величину ускорения переведём v_1 в м/с, v_1 = 15 м/с

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} = -4\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

1.94. Первоначально покоящееся тело начинает двигаться с постоянным ускорением a = 5·10^{-4} м/с. Определить путь, пройденный телом за первые t = 0,1 часа после начала движения.

Решение

1. Переведём заданный промежуток времени в с t = 360 с, и запишем уравнение пройденного пути при условии постоянства ускорения

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1,296 \cdot 10^5}{2} = 32,4\,\text{м}.$$

1.95. Автомобиль, движущийся со скоростью v = 10 м/с перед светофором начинает тормозить и через t = 4 с останавливается рядом со светофором. На каком расстоянии от светофора находился автомобиль вначале замедленного движения?

Решение

1. В данном случае заданная скорость является начальной скоростью, поэтому система уравнений, описывающих движение, будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - at; \\ s &= v_0 t - \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. В конечной точке движения скорость будет равна нулю, это обстоятельство позволяет из первого уравнения системы выразить величину ускорения

$$a = \frac{v_0}{t}.$$

3. Подставим значение ускорения во второе уравнение системы

$$s = v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2t} = \frac{v_0 t}{2} = 20\,м.$$

1.96. Для современных автомобилей разгон с ускорением a = 5 м/с^2 не является диковинкой. Какое время потребуется для разгона с таким ускорением до v = 60 км/час? Какой путь пройдёт при этом автомобиль?

Решение

1. Переведём для начала скорость в м/с, v = 16,7 м/с и запишем уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} v &= at; \\ x &= \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Из первого уравнения системы определим время разгона

$$t = \frac{v}{a} = 3{,}34\,с.$$

3. Подставим значение времени во второе уравнение

$$x = \frac{a}{2}\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} = 27{,}9\,м.$$

1.97. Четырёхступенчатая ракета-носитель вывела на орбиту за время t = 7 мин искусственный спутник Земли, сообщив ему скорость v = 8 км/с. Определить среднее ускорение ракеты, считая, что благодаря вращению Земли спутник на старте обладал начальной скоростью v_0 = 0,3 км/с.

Решение

1. Заданное время переведём в секунды: t = 420 с и запишем уравнение для скорости равноускоренного движения и разрешим его относительно ускорения

$$v = v_0 + at; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t} = 0{,}0183\frac{км}{с} = 18{,}3\frac{м}{с^2}.$$

1.98. Межпланетная космическая станция начинает свой полёт с начальной скоростью v_0 = 12 км/с, в конце первого миллиона километров космического путешествия (s = $1\cdot 10^6$ км) её скорость вследствие действия гравитационной силы уменьшилась до v = 3 км/с. Считая движение равнозамедленным, найти величину ускорения.

Решение

1. Запишем систему кинематических уравнений движения

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - at; \\ s &= v_0 t - \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения время и подставим полученное значение во второе уравнение системы

$$t = \frac{v_0 - v}{a}; \quad s = v_0\left(\frac{v_0 - v}{a}\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{v_0 - v}{a}\right)^2.$$

3. Полученное уравнение имеет одну неизвестную величину, ускорение a, решение которого даёт

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{9 - 144}{2\cdot 10^6} = -6{,}75\cdot 10^{-5}\,\frac{км}{с^2} = -6{,}75\cdot 10^{-2}\,\frac{м}{с^2}.$$

1.99. Пробежав по взлётной полосе расстояние s = 790 м, самолёт при скорости v = 240 км/час отрывается от земли. Определить время разгона и ускорение самолёта.

Решение

1. Запишем уравнения для скорости и пути при равноускоренном движении при нулевой начальной скорости

$$\left.\begin{aligned} v &= at; \\ s &= \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения время $t = v/a$ и подставим это значение во второе уравнение системы, предварительно переведя скорость в м/с, v = 66,7 м/с

$$s = \frac{a}{2}\frac{v^2}{a^2}; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{66{,}7^2}{2\cdot 790} \cong 2{,}81\frac{м}{с^2}.$$

3. Время разгона определится как:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{66{,}7}{2{,}81} \cong 23{,}7\,с.$$

1.100. Тело двигаясь прямолинейно с ускорение a = 2 м/с^2, за время t = 0,1 мин прошло путь x = 42 м. Определить начальную скорость тела.

Решение

1. Запишем уравнение изменения координаты равноускоренно движущегося тела

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

и разрешим его относительно искомой начальной скорости, переведя предварительно время в секунды: t = 6 с

$$x - \frac{at^2}{2} = v_0 t; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{x}{t} - \frac{at}{2} = \frac{42}{6} - \frac{2\cdot 6}{2} = 1\frac{м}{с}.$$

1.101. Первоначально движущееся со скоростью v_0 = 4 м/с равномерно и прямолинейно тело, начинает равноускоренное движение в том же направлении и за время t = 5 с проходит путь s = 70 м. Найти ускорение тела.

Решение

1. Ускорение тела можно найти непосредственно из уравнения пути при равноускоренном движении с начальной скоростью

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad s - v_0 t = \frac{at^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2} = \frac{2(70-20)}{25} = 4\frac{м}{с^2}.$$

1.102. Пуля, летящая со скоростью v_0 = 400 м/с, попадает в земляной вал, начинает двигаться равнозамедленно и проникает в него на глубину s = 36 см. Определить:

- время движения пули внутри вала;
- ускорение пули;
- скорость пули на глубине s_1 = 18 см;
- на какой глубине s_2 скорость пули уменьшится в n = 3 раза;
- скорость пули, когда она пройдёт η = 99% своего пути

Решение

1. Запишем уравнения для скорости и пути при равнозамедленном движении

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - at; \\ s &= v_0 t - \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Из первого уравнения системы выразим ускорение с учётом равенства нулю конечной скорости пули

$$0 = v_0 - at; \quad a = \frac{v_0}{t}.$$

3. Подставим значение ускорения во второе уравнение системы

$$s = v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2t}; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v_0} = \frac{2\cdot 0{,}36}{400} = 1{,}8\cdot 10^{-3}\,с.$$

4. Определим далее ускорение пули, для сего подставим во второе уравнение системы время движения пули до остановки

$$s = v_0\frac{2s}{v_0} - \frac{a}{2}\frac{4s^2}{v_0^2}; \quad s = 2s - \frac{2as^2}{v_0^2}; \quad a = \frac{v_0^2}{2s} = \frac{1{,}6\cdot 10^5}{0{,}72} = 2{,}2\cdot 10^5\frac{м}{с^2}.$$

5. Определим далее скорость пули при прохождении s_1 = 0,18 м, для чего уравнения скорости и пути перепишем следующим образом

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_0 - at_1; \\ v_2 &= v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Выразим из уравнения для скорости время t_1

$$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{a},$$

и подставим его значение в уравнение для s_1

$$s_1 = \frac{v_0(v_0 - v_1)}{a} - \frac{a}{2}\frac{(v_0 - v_1)^2}{a^2},$$

$$2as_1 = 2v_0^2 - 2v_0 v - v_0^2 + 2v_0 v - v_1^2,$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2as_1} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2s_1 v_0^2}{2s}} = v_0\sqrt{1 - \frac{s_1}{s}} = v_0\sqrt{1 - \frac{s_1}{s}} \cong 284{,}3\frac{м}{с}.$$

6. Определим время, в течение которого скорость уменьшится в три раза n = 3

$$\frac{v_0}{n} = v_0 - at_2; \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_0}{a}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{400}{2{,}2\cdot 10^5}\cdot 0{,}667 \cong 1{,}2\cdot 10^{-3}\,с.$$

7. Определим расстояние, на котором скорость пули уменьшится в n = 3 раза

$$s_2 = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2} = 400 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} - \frac{2{,}2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}47 \cdot 10^6}{2} \cong 0{,}318\,\text{м}.$$

8. Определим скорость пули при прохождении расстояния η = 0,99 s, для чего воспользуемся уравнением

$$v_2 = v_0\sqrt{1 - \frac{s_2}{s}} = v_0\sqrt{1-\eta} = 400\sqrt{0{,}01} = 40\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.103. Камень, пущенный скользить по льду с начальной скоростью v_0 = 5 м/с, останавливается на расстоянии s = 25 м от места старта. Определить путь, пройденный камнем за первые t_1 = 2 с движения.

Решение

1. Для определения пути воспользуемся уравнением ускорения, полученным в предыдущей задаче

$$a = \frac{v_0^2}{2s},$$

значение которого подставим в уравнение пути равнозамедленного движения

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{v_0^2}{4s} t_1^2 = 5 \cdot 2 - \frac{25}{100} \cdot 4 = 9\,\text{м}.$$

1.104. Автомобиль без начальной скорости начинает двигаться равноускоренно с ускорением a. Через время t от начала движения скорость автомобиля перестаёт изменяться. Определить расстояние, пройденное автомобилем за время 2t.

Решение

1. Скорость и пройденный путь на разгонном участке определяться уравнениями

$$\left.\begin{aligned} v &= at; \\ s &= \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Путь, пройденный во время равномерного движения в течение времени t

$$s_1 = vt = at^2.$$

3. Суммарный путь автомобиля

$$L = s + s_1 = \frac{at^2}{2} + at = \frac{3}{2}at^2.$$

1.105. За время t = 10 с частица прошла путь L = 60 м, при этом скорость частицы увеличилась в n = 5 раз. Определить величину ускорения, считая его постоянным.

Решение

1. Запишем уравнение скорости равноускоренного движения с учётом заданного увеличения скорости и выразим из него величину начальной скорости

$$5v_0 = v_0 - at; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{at}{4}.$$

2. Подставим значение начальной скорости в уравнение пути равноускоренного движения

$$L = \frac{at^2}{4} + \frac{at^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4L}{3t^2} = \frac{240}{300} = 0{,}8\,\text{с}.$$

1.106. Автомобиль движется с постоянным ускорением a = 1 м/с^2. Мимо наблюдателя он проезжает со скоростью v = 10,5 м/с. На каком расстоянии x автомобиль находился от наблюдателя секунду назад?

Решение

1. Запишем уравнение пути равнозамедленного движения, т.к. скорость за секунду до наблюдателя будет меньше наблюдаемой, т.е заданную скорость v примем за начальную скорость движения

$$x = vt - \frac{at^2}{2} = 10{,}5 \cdot 1 - \frac{1 \cdot 1}{2} = 10\,м.$$

1.107. Троллейбус отходит от остановки с ускорением a_1 = 0,2 м/с^2, достигает скорости v_1 = 36 км/час и движется с этой скоростью в течение t_2 = 2 мин. Затем, начинает замедляться и останавливается на следующей остановке через L_3 = 100 м. Определить среднюю скорость движения между остановками и построить график зависимости скорости от времени.

Решение

1. Определим параметры движения па первом ускоренном участке движения троллейбуса

$$v_1 = a_1 t_1; \quad t_1 = \frac{v_1}{a_1} = 50\,с; \quad L_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = 250\,м\,.$$

2. Параметры второго участка равномерного движения

$$L_2 = v_1 t_2 = 120 \cdot 10 = 1200\,м; \quad t_2 = 120\,с\,.$$

3. Запишем кинематические уравнения для третьего, равнозамедленного участка пути

$$\left.\begin{aligned} v_3 &= v_1 - a_3 t; \\ L_3 &= v_1 t_3 - \frac{a_3 t_3^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

4. Конечная скорость третьего участка равна нулю (троллейбус останавливается), с учётом этого обстоятельства

$$v_1 = a_3 t_3; \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{v_1}{a_3}\,.$$

5. Подставим значение t_3 в уравнение для L_3

$$L_3 = \frac{v_1^2}{a_3} - \frac{v_1^2}{2a_3}; \quad \Rightarrow \quad 2L_3 a_3 = 2v_1^2 - v_1^2; \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{v_1^2}{2L_3};$$

$$t_3 = \frac{2L_3 v_1}{v_1^2} = \frac{2L_3}{v_1} = 20\,с\,.$$

6. Определим среднюю скорость движения троллейбуса

$$< v >= \frac{L_1 + L_2 + L_3}{< \frac{L_1}{t_1} > + < \frac{L_2}{t_2} > + < \frac{L_3}{t_3} >},$$

$$< v >= \frac{1550}{50 + 120 + 20} \cong 8{,}2\,\frac{м}{с}\,.$$

7. Построим график зависимости скорости от времени v = f(t).

Рис. 1.107. Зависимость v = f(t)

1.108. Физкультурник пробежал расстояние s = 100 м за время t = 10 с, из которых t_1 = 2 с было затрачено на разгон, а остальное время на равномерное движение. Чему равна скорость его равномерного движения? средняя скорость движения <v>?

Решение

1. Средняя скорость физкультурника в режиме разгона равна полусумме скоростей на начальном и конечном этапе, в данном случае начальная скорость равна нулю, поэтому средняя скорость равноускоренного движения будет равна половине скорости равномерного движения. Уравнение пути, таким образом, можно записать следующим образом:

$$s = \frac{v}{2}t_1 + v(t - t_1); \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2s}{t_1 + 2(t - t_1)} = \frac{200}{2 + 16} = 11{,}1\frac{м}{c}.$$

2. Средняя скорость движения определится как:

$$< v >= \frac{s}{t} = \frac{100}{10} = 10\frac{м}{c}.$$

1.109. Тело движется равноускоренно с начальной скоростью v_0 = 1 м/с, пройдя некоторое расстояние, приобретает скорость v_1 = 7 м/с. Какова была скорость тела v_2, когда оно прошло половину расстояния?

Решение

1. Запишем систему кинематических уравнений для равноускоренного движения

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_0 + at; \\ s &= v_0 t + \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения системы время и подставим это значение во второе уравнение

$$t = \frac{v_1 - v_0}{a};$$

$$s = \frac{v_1 v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v_1^2 - 2v_0 v_1 + v_0^2}{2a}; \quad \Rightarrow \quad sa = \frac{v_1^2 + v_0^2}{2},$$

3. Поскольку $sa = v^2$, то

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_0^2}{2}} = \sqrt{\frac{49 + 1}{2}} = 5c.$$

1.110. Автомобиль, движущийся со скоростью v = 72 км/час, подъезжая к закрытому железнодорожному переезду, начал тормозить на расстоянии L = 50 м от него. У переезда машина стояла время t = 50 с. После открытия шлагбаума автомобиль набрал прежнюю скорость на том же отрезке пути. На сколько ближе к месту назначения оказался бы автомобиль, если бы ему не пришлось стоять перед закрытым шлагбаумом, при условии движения с постоянной скоростью без остановок? Движение при торможении и разгоне считать равнопеременным.

Решение

1. Поскольку торможение и разгон автомобиля происходил на одном и том же расстоянии с одинаковым ускорением, то за время разгона и торможения был пройден путь

$$s = 2L.$$

2. Если бы автомобиль двигался без остановки, то участок торможения и разгона был бы пройден в режиме

$$s_1 = vt .$$

3. Таким образом торможение и разгон отдалило автомобиль от конечного пункта на расстояние

$$\Delta s = vt - 2L = 20 \cdot 50 - 100 = 900\,м .$$

1.111. Лифт в течение первых t_1 = 3 с поднимается равноускоренно и достигает скорости v = 3 м/с, с которой продолжает двигаться в течение t_2 = 6 с. Затем с прежним ускорением лифт замедляется до полной остановки. Построить график зависимости скорости лифта от времени и определить высоту его подъёма.

Решение

1. График зависимости v = f(t) приведен на рис. 1.111. В первые три секунды лифт движется равноускоренно с ускорением

$$a = \frac{v}{t_1} = 1\frac{м}{с^2},$$

проходя расстояние

$$h_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{1 \cdot 9}{2} = 4{,}5\,м .$$

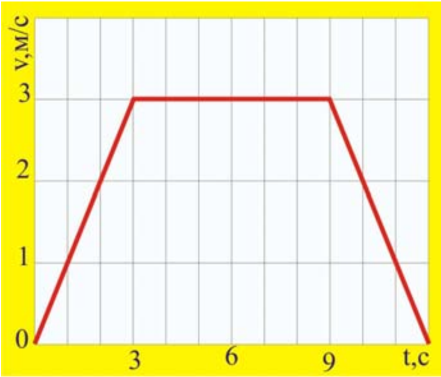

Рис. 1.111. График v = f(t)

В последующие шесть секунд лифт движется равномерно и поднимается на высоту

$$h_2 = vt_2 = 18\,м .$$

На участке торможения ввиду равенства тормозного ускорения разгонному ускорению

$$h_3 = h_1 = 4{,}5\,м .$$

2. Полная высота подъёма, таким образом, составит

$$H = h_1 + h_2 + h_3 = 2h_1 + h_2 = 27\,м .$$

1.112. Тело из состояния покоя начинает равноускоренное движение и к концу девятой секунды (t_9 = 9 с) проходит расстояние L = 17 м. Определить:

- ускорение a с которым движется тело;
- скорость тела в конце девятой секунды v_9;
- скорость тела в момент прохождения s_x = 25 м от начала движения.

Решение

1. Ускорение тела определится из системы кинематических уравнений

$$\left.\begin{aligned} v &= at_9; \\ L &= \frac{at_9^2}{2}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{2L}{t_9^2} = 0{,}4\frac{м}{с^2}; \quad v_9 = at_9 = 3{,}6\frac{м}{с}.$$

2. Определим время прохождения s_x

$$s_x = \frac{at_x^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_x = \sqrt{\frac{2s_x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{0{,}4}} = 11{,}2\,с .$$

3. Скорость в конце расстояния s_x

$$v_x = at_x = 4{,}48\frac{м}{с}.$$

1.113. Тело из состояния покоя начинает двигаться с постоянным ускорением. Найти отношение расстояний, проходимых за последовательные промежутки времени.

Решение

1. Обозначим ускорение как a, длительность одного промежутка времени – τ. Если начало координатной оси OX совместить с начальным положение тела, то положение тела в конце n-го промежутка времени определится уравнением

$$x_n = \frac{a(n\tau)^2}{2}, \quad (n = 1,2,3\ldots).$$

2. Для двух соседних участков движения полученное уравнение представится следующим образом:

$$s_1 = \frac{a\tau^2}{2}; \quad s_n = x_n - x_{n-1} = \frac{a\tau^2}{2}\left[n^2 - (n-1)^2\right] = \frac{a\tau^2}{2}(2n-1).$$

3. Подставляя значения n =1, n = 2, n = 3 в последнее уравнение, получим:

$$s_1 : s_2 : s_3 \ldots : s_n = 1:3:5\ldots:(2n-1).$$

1.114. За какую секунду от начала движения путь, пройденный телом при равноускоренном движении, втрое больше пути, пройденного в предыдущую секунду, если движение протекает без начальной скорости.

Решение

1. Путь, проходимый материальной точкой за некоторую n-ю секунду движения определится уравнением, полученным в предыдущей задаче

$$s_n = x_n - x_{n-1} = \frac{a\tau^2}{2}\left[n^2 - (n-1)^2\right].$$

2. За первую секунду движения точка пройдёт путь (n = 1)

$$s_1 = \frac{a\tau^2}{2}\left[1^2 - (1-1)^2\right] = \frac{a\tau^2}{2}\cdot 1;$$

за вторую секунду движения (n = 2)

$$s_2 = \frac{a\tau^2}{2}\left[2^2 - (2-1)^2\right] = \frac{a\tau^2}{2}\cdot 3,$$

другими словами, $s_2 = 3s_1$, т.е. за вторую секунду точка проходит в трое большее расстояние, чем за первую секунду.

1.115. Тело начинает двигаться из состояния покоя равноускоренно и за десятую секунду проходит путь s_{10} = 38 м. Найти путь, пройденный телом за двенадцатую секунду движения.

Решение

1. Запишем, воспользовавшись результатами двух предыдущих задач, уравнение пути, проходимого за τ = 10 с движения

$$s_{10} = \frac{a\tau^2}{2}\left[n^2 - (n-1)^2\right] = \frac{a\cdot 10^2}{2}[100-81];$$

откуда ускорение движения определится как:

$$a = \frac{2s_{10}}{\tau^2\left[n^2 - (n-1)^2\right]} = \frac{2\cdot 38}{100\cdot 19} = 4\cdot 10^{-2}\,\frac{м}{с^2}.$$

2. Определим путь пройденный телом за 12 секунду движения

$$s_{12} = \frac{a\tau^2}{2}\left[n^2 - (n-1)^2\right] = \frac{a\cdot 10^2}{2}[144-121] = 46\,м.$$

---

1. 116. Пассажир, стоящий у начала третьего вагона электрички, определил, что начавший двигаться вагон прошёл мимо него за время t_1 = 5 с, а вся электричка – за t_2 = 15,8 с. сколько вагонов в электричке? За какое время мимо пассажира прошёл последний вагон. Движение считать равноускоренным.

Решение

1. Примем длину третьего вагона электрички за L_1, а длину всего состава за L_0, тогда количество вагонов в электричке, с учётом того что движение первых двух вагонов пассажир видеть не мог, можно представить следующим образом

$$N = 2 + \frac{L_0}{L_1}.$$

2. Выразим величины L_1 и L_0 из уравнений пути равноускоренного движения

$$L_1 = \frac{at_1^2}{2}; \quad L_0 = \frac{at_2^2}{2}.$$

3. Подставим значение L_1 и L_0 в уравнение для количества вагонов электрички

$$N = 2 + \left(\frac{t_2^2}{t_1^2}\right) = 2 + \frac{250}{25} = 12.$$

4. Найдём время, за которое мимо пассажира пройдут девять вагонов. Всего вагонов без последнего 11, два вагона пассажир не видел, так как начал наблюдать, начиная с третьего вагона, поэтому n = N – 3 = 9

$$n = \left(\frac{t_x^2}{t_1^2}\right); \quad \Rightarrow \quad t_x = \sqrt{nt_1^2} = \sqrt{225} = 15\,с.$$

5. Определим время прохождения последнего вагона

$$\tau = t_2 - t_x = 0{,}8\,с.$$

1.117. Доска, разделенная на n = 5 равных отрезков, начинает скользить по наклонной плоскости. Первый отрезок прошёл мимо отметки сделанной на наклонной плоскости, в том месте, где находился передний край доски в начале движения, за время t = 2 с. За какое время пройдёт мимо этой отметки последний отрезок доски? Движение считать равноускоренным.

Решение

1. Используя уравнения предыдущей задачи, определим время прохождения отметки всех n отрезков доски

$$t_n = \sqrt{nt^2}.$$

2. Вычислим время прохождения (n-1) отрезков, т.е. всех отрезков, кроме последнего отрезка

$$t_{n-1} = \sqrt{(n-1)t^2}.$$

3. Время прохождения последнего, пятого отрезка доски определится в виде разности времён

$$t_5 = t_n - t_{n-1} = t\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{4}\right) = 0{,}472\,с.$$

1.118. По наклонной доске пустили снизу шарик вверх. На расстоянии L = 0,3 м от старта шарик побывал дважды: через t_1 = 1 с и t_2 = 2 с после начала движения. определить начальную скорость и ускорение шарика, считая его постоянным.

Решение

1. Запишем кинематические уравнения для подъёма и спуска шарика

$$L = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}; \quad L = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}.$$

2. Приравняем правые части записанных выше уравнений и разрешим полученное равенство относительно начальной скорости

$$v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2},$$

$$2v_0(t_2 - t_1) = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2); \Rightarrow \quad v_0 = \frac{a(t_2 + t_1)}{2}$$

3. Для определения ускорения подставим значение начальной скорости в одно из исходных уравнений

$$L = \frac{at_1(t_2 + t_1)}{2} - \frac{at_1^2}{2} = \frac{at_1 t_2}{2}; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2L}{t_1 t_2} = \frac{0{,}6}{0{,}2} = 0{,}3\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

4. Найдём величину начальной скорости шарика

$$v_0 = \frac{a(t_2 + t_1)}{2} = \frac{L(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = \frac{0{,}3 \cdot 3}{2} = 0{,}45\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.119. При равноускоренном прямолинейном движении некая точка проходит путь L_1 = 2 м за первые t_1 = 4 с, а следующий участок длиной L_2 = 4 м за время t_2 = 5 с. Определить ускорение точки.

Решение

1. Запишем уравнения для двух заданных участков равноускоренного движения точки

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2}; \\ L_2 &= v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения системы начальную скорость и подставим во второе уравнение

$$v_0 = \frac{2L_1 - at_1^2}{2t_1}.$$

$$L_2 = \left(\frac{2L_1 - at_1^2}{2t_1}\right)t_2 + \frac{at_2^2}{2}.$$

3. Разрешим полученное уравнение относительно ускорения

$$L_2 = \frac{2L_1 t_2 - at_1^2}{2t_1} + \frac{at_2^2}{2}; \quad 2L_2 t_1 = 2L_1 t_2 - at_1^2 t_2 + 2at_2^2 t_1;$$

$$2(L_2 t_1 - L_1 t_2) = at_1 t_2 (t_1 + t_2);$$

$$a = \frac{2(L_2 t_1 - L_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = \frac{2(16 - 10)}{20 \cdot 9} \approx 6{,}67 \cdot 10^{-2}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

1.120. Материальная точка движется равномерно и прямолинейно со скоростью v = 2 м/с в течение времени t = 4 с. Затем точка получает ускорение, противоположное направлению движения. Определить модуль ускорения на втором этапе движения, если она вернулась в исходную точку через время 2t после начала движения.

Решение

1. Движение исследуемой точки можно разбить на три характерных участка: рав-

номерное движение, торможение до остановки и замедленное движение в начальную точку в противоположном направлении

$$s_1 = vt; \quad s_2 = vt - \frac{at^2}{2}; \quad s_3 = at^2 .$$

2. Так как $s_3 = s_1 + s_2$, то

$$vt + vt - \frac{at^2}{2} = at^2; \quad \Rightarrow \quad 2vt = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4v}{t} = 2\frac{м}{с^2} .$$

1.121. Частица пролетает L = 2 м равномерно, а затем тормозит с ускорением a = $5\cdot10^5$ м/с^2. При какой скорости частицы время её движения от вылета до остановки будет наименьшим?

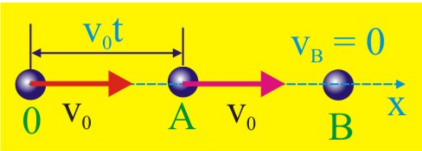

Рис. 1.121. Торможение частицы

Решение

1. Разобьем весь путь частицы на два характерных участка: равномерное движение со скоростью v_0 в течение времени t (участок OA) и равнозамедленное движение на участке AB, с остановкой в точке B.

1. Выразим начальную скорость из уравнения пути на участке OA

$$L = v_0 t; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{L}{t} .$$

2. Запишем уравнение скорости равнозамедленного движения на участке AB

$$v = v_0 - at ,$$

так как в точке B скорость равна нулю, то

$$v_0 = at .$$

3. Приравняем скорости на стыке участков равномерного и равнозамедленного участков движения (точка A рис. 1.121) с целью получения минимального времени движения частицы

$$\frac{L}{t} = at; \quad \Rightarrow \quad L = at^2; \quad t_{min} = \sqrt{\frac{L}{a}};$$

4. Подставим значение времени в уравнение скорости

$$v_0 = a\sqrt{\frac{L}{a}} = \sqrt{La} = \sqrt{2\cdot5\cdot10^5} = \sqrt{10^6} = 10^3\frac{м}{с} .$$

1.122. При движении тела вдоль оси X его координата изменяется по закону

$$x(t) = 9t + 0{,}3t^2 .$$

Классифицировать движение, найти зависимости скорости и ускорения от времени. Построить зависимости от времени: координаты $x = f(t)$, скорости $v = f(t)$ и ускорения $a = f(t)$.

Решение

1. Движение можно, записав уравнение равноускоренного движения

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} .$$

Сравнение записанного уравнения с заданным уравнением, позволяет определить начальную скорость и ускорение движения

$$v_0 = 9\frac{м}{с}; \quad a = 0{,}6\frac{м}{с^2} ,$$

уравнение скорости движения представится следующим образом

$$v(t) = v_0 + at = 9 + 0{,}6t .$$

2. Построим графики зависимостей $x = f(t)$, $v = f(t)$, $a = f(t)$ (рис. 1.122)

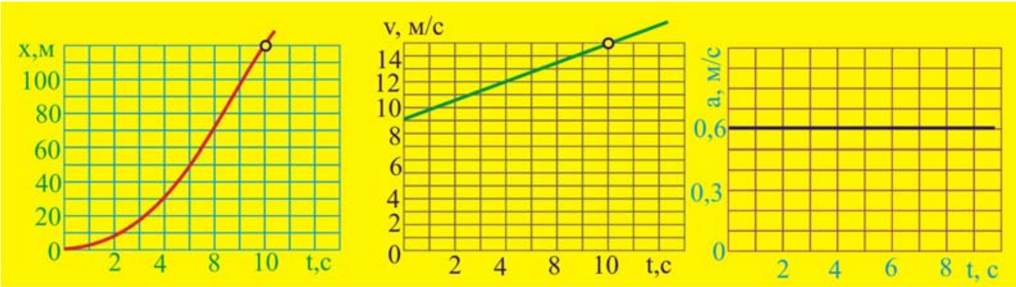

Рис. 1.122. Графики зависимостей $x = f(t)$, $v = f(t)$, $a = f(t)$

1.123. Материальная точка перемещается вдоль горизонтальной оси в соответствии с уравнением

$$x(t) = 6t - 0{,}125t^2.$$

Определить скорость точки для времени t_1 = 2 с и среднюю скорость за первые t_2 = 10 с движения.

Решение

1. Сравнивая заданное уравнение движения с кинематическим уравнением равнозамедленного движения $x(t) = v_0 t - at^2/2$, можно видеть, что

$$v_0 = 6\frac{м}{с}; \quad a = 0{,}25\frac{м}{с^2}.$$

2. Уравнение скорости точки представится следующим образом

$$v_x(t) = 6 - 0{,}25t,$$

поэтому

$$v_1 = 5{,}5\frac{м}{с}.$$

3. Средняя скорость за первые t_2 = 10 с движения

$$< v >= v_0 - \frac{v_2}{2} = 6 - 0{,}125t_2 = 4{,}75\frac{м}{с}.$$

1.124. На рис. 1.124 приведены три зависимости координат неких точек для трёх режимов их движения. Записать для каждого случая законы движения и построить зависимости $v = f(t)$ и $a = f(t)$.

Рис. 1.124. Зависимости x = f(t)

Решение

1. Зависимость 1 (рис. 1.124) является параболой, т.е. движение равноускоренное с начальной скоростью

$$v_0 = 10 м/с.$$

Уравнения движения в общем виде запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_0 + a_1 t; \\ s_1 &= v_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

В момент времени t = 7 с первая точка, судя по заданным графикам движения, прошла путь s_1 = 100 м, а $v_0 t = 10\,м$, это даёт основание записать уравнение пути следующим образом

$$s_1 = 10 + \frac{a_1 t^2}{2},$$

и найти величину ускорения

$$a_1 = \frac{2(s_1 - 10)}{t^2} = 3{,}67\,\frac{м}{с^2}.$$

2. Второй график соответствует равномерному движению с x_0 = 20 м. Скорость равномерного движения определится как

$$v_2 = \frac{s_2 - x_0}{t_2} = \frac{60 - 20}{10} = 4\,\frac{м}{с},$$

уравнение движения запишется следующим образом:

$$x(t) = 20 + 4t.$$

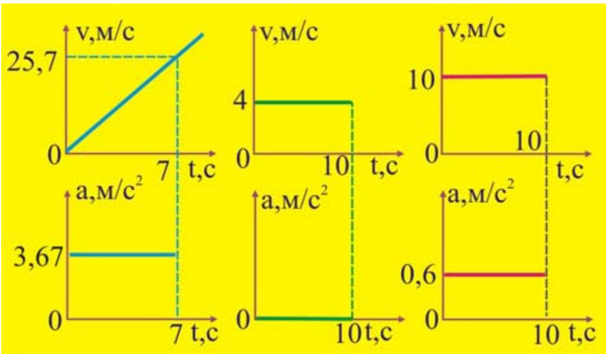

Рис. 1.124.1. Зависимости: $v = f(t),\ a = f(t)$

3. Третий график так же соответствует равномерному движению со скоростью

$$v_3 = \frac{s_3 - x_0}{t_3} = \frac{120 - 20}{10} = 10\,\frac{м}{с},$$

которому эквивалентно следующее уравнение движения:

$$x(t) = 20 + 10t.$$

4. На рис. 1.124.1 представлены зависимости скорости и ускорения от времени для трёх заданных движений.

1.125. Точка двигалась вдоль оси X согласно приведённому графику. Какой путь прошла точка за время от t_1 = 1 с до t_2 = 5 с? Определить перемещение и среднюю скорость за этот интервал времени.

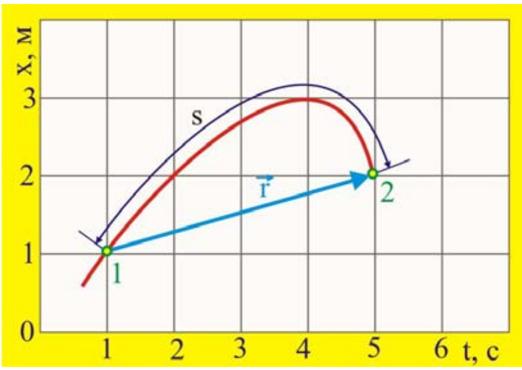

Рис. 1.125. Зависимость координаты от времени

Решение

1. Длина пути определяется, как протяжённость траектории в заданном промежутке времени (рис. 1.125) В данном случае за интервал времени Δt = 4 с точка проходит путь s = 3 м, при перемещении $|\vec{r}| = 1\,м$.

2. Средняя скорость движения определится соотношением

$$\langle v \rangle = \frac{|\vec{r}|}{\Delta t} = 0{,}25\,\frac{м}{с}.$$

1.126. На рис. 1.126 приведен график зависимости координаты точки от времени. После времени t_1 кривая представляет собой параболу. Описать движение и получить графические зависимости скорости и ускорения от времени.

Решение

1. В период времени $0 < t < t_1$ движение проходит с постоянной скоростью, т.е. – это

равномерное движение со скоростью равной v_0, движение описывается уравнениями:

$$v_0 = \frac{x_1 - x_0}{t_1}, \qquad x(t) = x_0 + v_0 t\,.$$

2. На участке $t_1 < t < t_3$ при $\Delta t = t_2 - t_1$ движение равнопеременное с ускорением

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1(t_2 - t_1)}.$$

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1) + \frac{a(t - t_1)^2}{2}.$$

3. В момент времени t_2 точка останавливается (рис. 1.126), т.е. происходит изменение направления движения, при $t > t_2$ точка начинает приближаться к началу выбранной системы отсчёта, достигая в момент времени t_3 скорости $-v_0$.

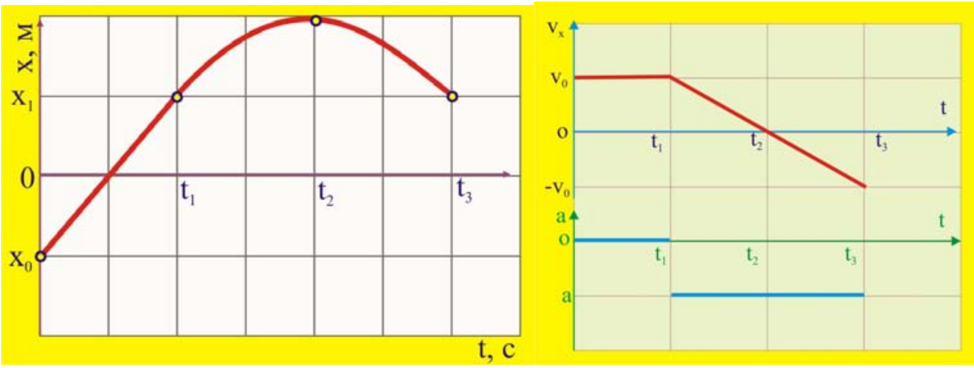

Рис. 1.126. Зависимости: x=f(t), v_x = f(t), a = f(t)

1.127. На рис. 1.127 приведен график зависимости скорости некой частицы от времени. Определить среднюю скорость на первой половине пройденного частицей пути.

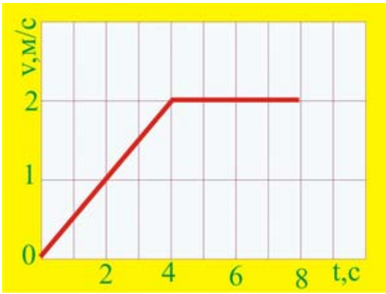

Рис. 1.127. Зависимость $v = f(t)$

Решение

1. Движение можно представить, как состоящее из двух характерных участков: в период времени от 0 до 4 с частица движется равноускоренно, а далее с постоянной скоростью v = 2 м/с.

2. Определим величину ускорения

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2}{4} = 0{,}5\frac{м}{с^2}.$$

3. Определим путь, пройденный частицей в режиме равноускоренного движения

$$x_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{0{,}5 \cdot 16}{2} = 4\,м,$$

$$x_2 = v \cdot t_2 = 2 \cdot 4 = 8\,м,$$

таким образом, середина пути составляет расстояние s = 12 м, т.е. до середины пути частица после окончания равноускоренного движения перемещается ещё одну секунду.

4. Средняя скорость определяется, как известно, отношением перемещения к промежутку времени, за который это перемещение происходит

$$< v >= \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{6}{4 + 1} = 1{,}2\frac{м}{с}.$$

Рис. 1.128. Зависимость v = f(t)

1.128. Две автомашины в момент времени t = 0 вышли из пункта А в одном направлении. По графикам зависимости скорости от времени (рис. 1.128), определить место и время встречи.

Решение

1. Составим уравнения движения автомашин, одна из которых движется с постоянной скоростью v = 20 м/с, а вторая автомашина – равноускоренно, с ускорением

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20}{360} = 5{,}56 \cdot 10^{-2}\,\frac{м}{с},$$

$$x_1(t) = v \cdot t, \quad x_2(t) = \frac{at^2}{2}.$$

2. Поскольку при встречи значения координат, отсчитываемых от пункта А становятся одинаковыми, то приравнивая полученные уравнения, определим время, в течение которого второй автомобиль встретился с первым автомобилем:

$$vt_B = \frac{at_B^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{2v}{a} = \frac{2 \cdot 20}{5{,}56 \cdot 10^{-2}} = 720\,с = 12\,мин.$$

3. Расстояние, отсчитываемое от точки старта, до встречи определится как:

$$x_B = v \cdot t_B = 20 \cdot 720 = 1{,}44 \cdot 10^4\,м = 14{,}4\,км.$$

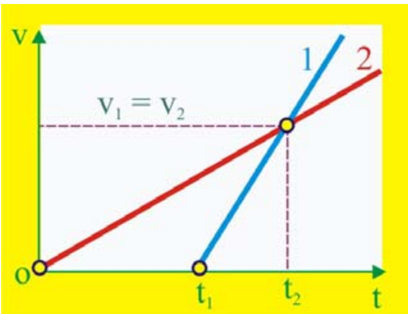

Рис. 1.129. Зависимости v = f(t)

1.129. На рис. 1.129 приведены зависимости скоростей от времени двух частиц, стартовавших из одной точки. Известны моменты времени t_1 и t_2. Определить время встречи частиц.

Решение

1. Пересечение зависимостей скоростей от времени позволяет утверждать, что в момент времени t_2 скорости частиц одинаковы, что даёт основания для ускорений записать следующие уравнения:

$$a_1 = \frac{v}{t_2}; \quad a_2 = \frac{v}{t_2 - t_1}.$$

2. Найдём отношение ускорений

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2}{t_2 - t_1}.$$

3. Точка встречи частиц в момент времени t_B характеризуется равенством их координат, т.е.

$$\frac{a_1 t_B^2}{2} = \frac{a_2 (t_B - t_1)^2}{2}; \quad a_1 t_B^2 = a_2 (t_B - t_1)^2; \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{(t_B - t_1)^2}{t_B^2};$$

4. Заменим в последнем уравнении отношение ускорений

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2}{t_2 - t_1} = \frac{(t_B - t_1)^2}{t_B^2},$$

и преобразуем полученное соотношение к виду

$$t_B = \frac{(t_2 - t_1)\sqrt{t_2 - t_1}}{\sqrt{t_2}}.$$

1.130. Некая частица начинает движение из состояния покоя с постоянным ускорением $a = 10$ м/с^2. Спустя $t_1 = 6$ с частица начинает двигаться равномерно, в течение $t_2 = 7$ с. Затем, в течение следующих $t_3 = 3$ с частица получает отрицательное ускорение $a_3 = -20$ м/с^2. Построить зависимости скорости, ускорения и координат частицы от времени. Найти скорость частицы для момента времени $\tau = 16$ с. Определить тормозной путь.

Решение

1. Определим скорость на первом участке движения

$$v = at_1 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ м/с}.$$

2. Определим протяжённость первого участка равноускоренного движения частицы

$$x_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{10 \cdot 36}{2} = 180 \text{ м}.$$

3. Протяжённость второго участка равномерного движения частицы

$$x_2 = x_1 + vt_2 = 180 + 420 = 600 \text{ м}.$$

4. Протяжённость третьего участка равнозамедленного движения

$$x_3 = x_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2} = 600 + 90 = 690 \text{ м}.$$

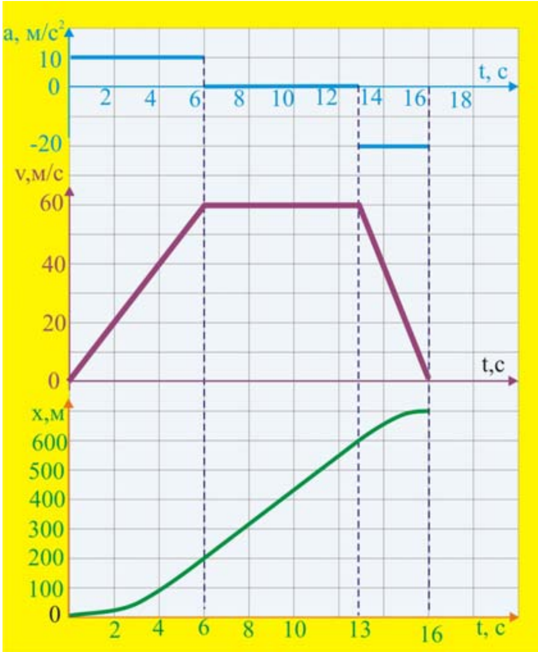

Рис. 1.130. Зависимости: a = f(t), v = f(t), x = f(t)

5. В момент времени $\tau = 16$ с скорость частицы будет равна нулю, потому что в плане изменения скорости разгон с ускорением $a_1 = 10$ м/с^2 в течении времени $t_1 = 6$ с эквивалентен торможению с ускорением $a_2 = -20$ м/с, т.е. $v_\tau = 0$.

1.131. Частица начинает двигаться из начала системы отсчёта равноускоренно. Через $t_1 = 5$ с движение становится равномерным со скоростью $v = 3$ м/с. Через время $t_2 = 10$ с от начала движения частица начинает равномерно замедляться так, что через $\Delta t = 2$ с она останавливается. После остановки частица вновь ускоряется в направлении начала системы отсчёта с ускорением $a = -1{,}5$ м/с^2. Через какое время после начала движения тело вновь достигнет исходной точки? Построить зависимость координат частицы от времени и изобразить траекторию движения.

Решение

1. Определим ускорение $\vec{a}_1$ на первом, разгонном участке движения

$$v = a_1 t_1; \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{v}{t_1} = 0{,}6 \frac{\text{м}}{\text{c}^2}.$$

2. Найдём длину разгонного участка

$$x_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{0{,}6 \cdot 25}{2} = 7{,}5 \text{ м}.$$

3. Путь частицы, пройденный за время прямолинейного равномерного движения $t_2 = 10$ с

$$x_2 = vt_2 - x_1 = 22{,}5 \text{ м}.$$

4. Путь, пройденный частицей к моменту её остановки

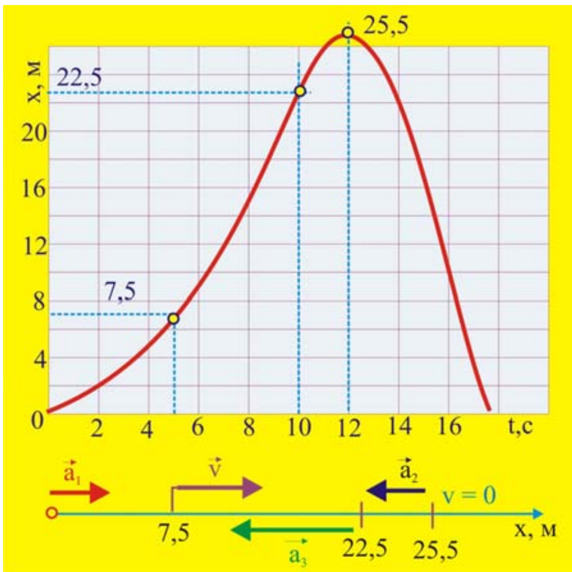

Рис. 1. 131. Зависимость координат от времени

$$x_3 = x_2 + \frac{a\Delta t^2}{2} = 25{,}5\,\text{м}.$$

5. Определим время возврата частицы в исходную точку τ

$$0 = x_3 - \frac{a\tau^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = a\tau^2; \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2x_3}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 25{,}5}{1{,}5}} = 5{,}83\,\text{с}$$

6. Полное время движения частицы τ_Σ

$$\tau_\Sigma = t_2 + \Delta t + \tau = 10 + 2 + 5{,}83 = 17{,}8\,\text{с}.$$

7. Зависимость координаты частицы от времени приведена на рис. 1.131 (верхний фрагмент), там же (нижний фрагмент) приведена прямолинейная траектория движения с указанием соответствующих кинематических параметров.

1.132. На рис. приведена зависимость ускорения от времени. Построить зависимости скорости, перемещения и координаты частицы в функции времени, если начальная скорость v_0 = – 3 м/с, начальная координата частицы x_0 = 2 м.

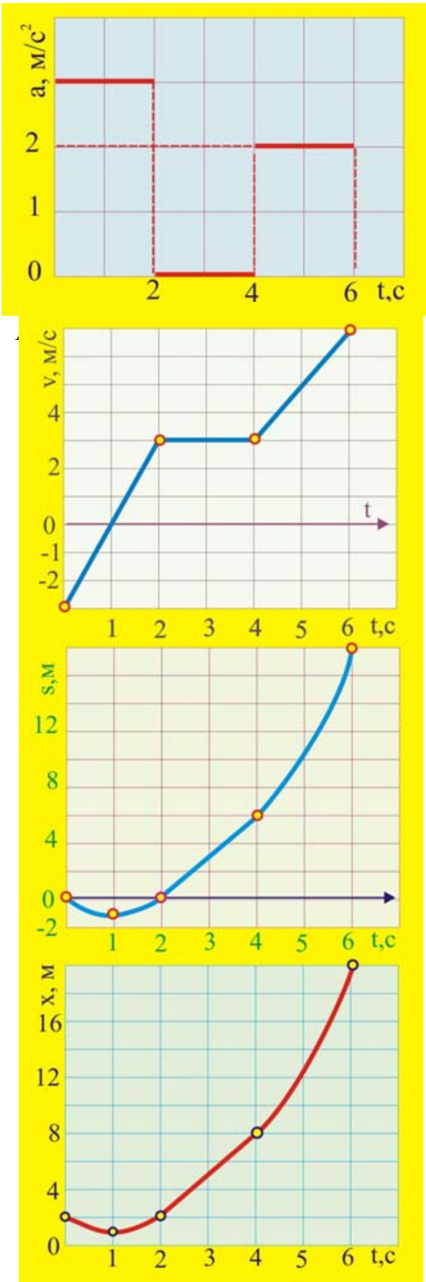

Рис. 1.132.1. Графики движения

Решение

1. Для построения графиков скорости, пути и перемещения определим кинематические параметры движения:

В период времени $0 \le t \le 2\,\text{с}$ движение равнопеременное со скоростью

$$v_1(t) = -3 + 3t_1;$$

путь, пройденный на этом участке равен

$$s_1 = -3t_1 + \frac{3t_1^2}{2};$$

из полученных уравнений следует, что частица через Δt = 2 с пройдёт через начало координат, а при t = 1 с путь составит – 1,5 м, перемещение частицы в первые две секунды движения в ускоренном режиме

$$x_1 = 2 - 3t_1 + 1{,}5t_1^2;$$

В интервале времени $2 \le t \le 4\,\text{с}$ частица движется с постоянной скоростью v_2 = 3 м/с

$$s_2 = 3t - 6;$$

$$x_2 = 3t - 4;$$

В интервале времени $4 \le t \le 6\,\text{с}$ частица, судя по заданной зависимости ускорения от времени снова движется равноускоренно с a_3 = 2 м/с^2 в соответствии с уравнениями

$$v_3 = v_{0(3)} + at_3 = 2t - 5;$$

пройденный путь и перемещение на третьем участке определятся как

$$s_3 = s_{0(3)} + v_{0(3)}t_3 + \frac{a_3t_3^2}{2};$$

$$s_3 = t_3^2 - 5t_3 + 4;$$

$$x_3 = t_3^2 - 5t_3 + 12.$$

1.133. Частица движется вдоль оси X в соответствие с приведенной зависимостью x = f(t). Отрезки зависимости представляют собой прямые $(0 \le t \ge 1c)$, $(2c \le t \ge 3c)$ и параболы. Записать закон движения частицы и построить зависимости скорости и ускорения от времени. Изобразить траекторию движения частицы.

Рис. 1.133. Зависимость x – f(t)

Решение

1. Так как в промежутке времени $(0 \le t \ge 1c)$ движение равномерное, а за 1 с частица проходит расстояние 5 м, то скорость на этом интервале будет составлять v_1 = 5 м/с, ускорение, соответственно будет: a_1 = 0. Уравнение движения представится следующим уравнением

$$x_1 = 5 + 5t;$$

2. В интервале времени $(1c \le t \ge 2c)$ зависимость x = f(t) представляется отрезком параболы, ускорение движения определится как

$$x_2 = -\frac{at^2}{2}; \quad 7{,}5 = -\frac{a \cdot 1}{2}; \quad a = -15\frac{м}{с^2},$$

скорость на этом участке движения

$$v_2 = v_1 - at; \quad v_2 = 5 - 15 \cdot 1 = -10\frac{м}{с}.$$

Уравнение движения в этом интервале времени представится следующим образом

$$x_2 = 6 + 10t - 2{,}5t^2.$$

3. Третий участок движения $(2c \le t \ge 3c)$ будет снова равномерным со скоростью $v_3 = -10$ м/с, при этом уравнение движения запишется так:

$$x_3 = 27{,}5 - 10t.$$

4. Четвёртый участок движения будет равнозамедленным

$$x_3 = x_{3(0)} - v_{3(0)}t + \frac{a_3t^2}{2}; \quad x_3 = 75{,}2 - 40t + \frac{a_3t^2}{2},$$

с ускорением a_3 = 10 м/с^2 и с начальной скоростью $v_{3(0)}$ = – 10 м/с.

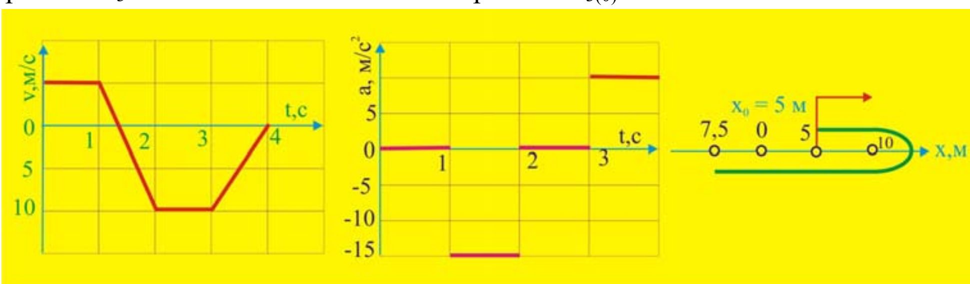

Рис. 1.133.1. Зависимости v = f(t); a = f(t), траектория

1.134. Частица движется прямолинейно в соответствии с приведенной (рис. 1.134)зависимостью скорости от времени. Для t_0 = 0 и x_0 = 5 м построить графики зависимостей координаты, пути и ускорения от времени. Получить соответствующие уравнения движения.

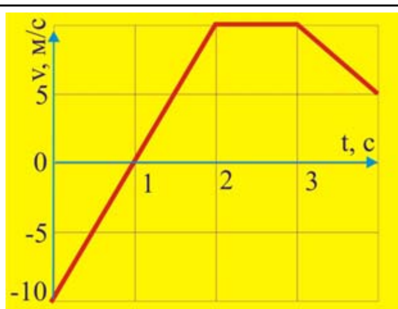

Рис. 1.134. Зависимость

Решение

1. По заданному графику видно, что в период

времени $(0 \le t \le 2c)$ движение ускоренное, потому что скорость в этом интервале времени изменяется за 2 с от – 10 м/с до 10 м/с, т.е. ускорение составляет

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = 10\frac{м}{с^2}.$$

Уравнение скорости на этом участке движения запишется следующим образом

$$v_1 = v_{1(0)} + at_1 = -10 + 10t.$$

Изменение координаты во времени в интервале $(0 \le t \le 2c)$

$$x_1(t) = x_0 - vt + \frac{at_1^2}{2} = 5 - 10t_1 + 5t_1^2.$$

2. В период времени $(2c \le t \le 3c)$ скорость постоянна v_2 = 10 м/с, следовательно, ускорение $a_2 = 0$, изменение координаты описывается уравнением

$$x_2(t) = 10t_2 - 15.$$

3. В третий характерный период времени $(3c \le t \le 4c)$ частица движется равнозамедленно с ускорением

$$a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = -5\frac{м}{с^2}.$$

Скорость на этом участке изменяется в соответствии с уравнением

$$v_3(t) = v_{3(0)} - a_3 t = 25 - 5t_3.$$

Уравнение изменения координаты в интервале времени $(3c \le t \le 4c)$

$$x_3(t) = x_0 + x_1 + x_2 + v_3 t - \frac{a_3 t_3^2}{2} = -37{,}5 + 25t - 2{,}2t_3^2.$$

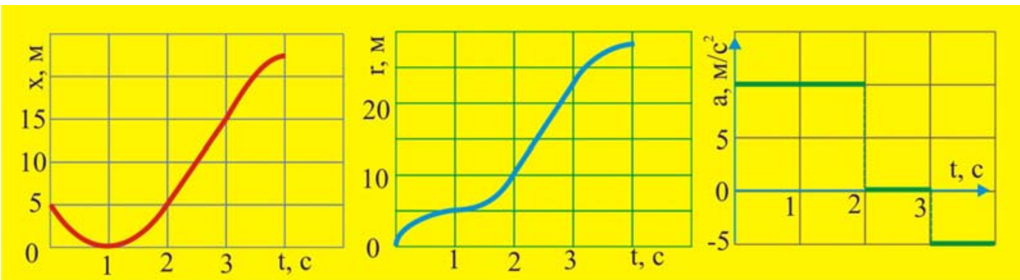

Рис. 1.134.1. Графики зависимостей: x = f(t), r = f(t) и a = f(t)

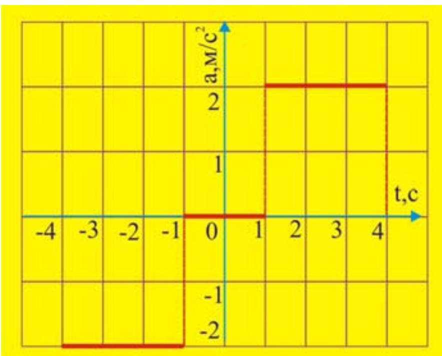

Рис. 1.135. Зависимость a = f(t)

1.135. Задана зависимость ускорения частицы от времени (рис. 1.135). Построить графики зависимости скорости и координаты от времени, если при t_0 = 1 с скорость частицы v_0 = –2 м/с, x_0 = 1 м.

Решение

1. Заданное движение имеет три характерных участка, два участка ускоренного движения и один участок равномерного движения.

На первом участке, $(-4c \le t \le -1c)$ движение равнозамедленное с ускорением $a_1 = -2$ м/с^2.
Уравнение скорости на этом участке движения в общем виде определится уравнением

$$v_1 = v_{1(0)} + a_1 t_1;$$

$$где: \quad v_{1(0)} = a_1 \cdot \Delta t - v_0 = -4\frac{м}{с},$$

следовательно,

$$v_1(t) = -4 + 2t.$$

Зависимость координаты от времени при $(-4c \le t \le -1c)$ представится следующим образом

$$x_1(t) = x_0 - v_{1(0)}t + \frac{a_1t_1^2}{2},$$

$$x_1(t) = 4 - 4t + \frac{2t_1^2}{2}.$$

2. На втором характерном участке движения $(-1c \le t \le 1c)$ частица движется равномерно с постоянной скоростью $v_2 = -2$ м/с, т.е. $a_2 = 0$ с начальной координатой $x_{2(0)} = x_1 - x_0 = 4 + 1 = 5$ м, изменение координаты во времени будет соответствовать уравнению

$$x_2(t) = x_{2(0)} - v_2t = 3 - 2t.$$

3. Третий участок движения $(1c \le t \le 4c)$ является равноускоренным с ускорением $a_3 = 2$ м/с^2 и с начальной скоростью $v_{3(0)} = 1$ м/с. Уравнение скорости

$$v_3(t) = v_{0(3)} + a_3t_3 = -3 - t.$$

Уравнение координаты

$$x_3(t) = 2{,}5 - 3t_3 - 0{,}5t_3^2.$$

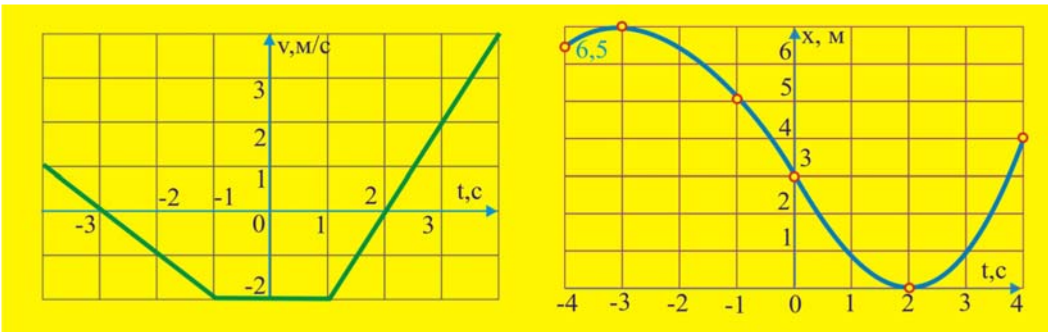

Рис. 135.1. Графики зависимости скорости и координаты от времени

1.136. Две частицы, расстояние между которыми L одновременно начинают движение навстречу друг другу вдоль одной прямой: первое равномерно со скоростью v, а второе из состояния покоя с ускорением a. Через какое время частицы встретятся?

Решение

1. Если равномерно движущаяся частица до встречи пройдёт расстояние x, то вторая частица, перемещающаяся с ускорением a проделает до встречи путь (L – x). В этом случае уравнения их движения можно представить так:

$$\left.\begin{aligned} x &= vt; \\ (L - x) &= \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Подставим значение координаты встречи из первого уравнения во второе

$$(L - vt) = \frac{at^2}{2}; \quad 2L - 2vt = at^2,$$

и составим квадратное уравнение относительно искомого времени

$$at^2 + 2vt - 2L = 0; \quad t^2 + \frac{2v}{a}t - \frac{2L}{a} = 0,$$

решение которого будет иметь вид:

$$t = -\frac{v}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)^2 + \frac{2L}{a}} = \frac{\sqrt{v^2 + 2aL} - v}{a}.$$

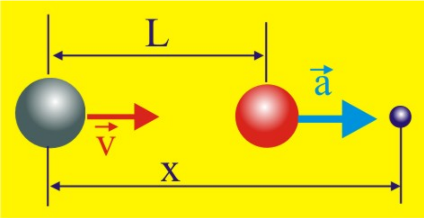

Рис. 1.137. Схема движения частиц

1.137. Две частицы, между которыми первоначально было расстояние L (рис. 1.137), начинают двигаться в одном направлении: первая – из состояния покоя с постоянным ускорением a, вторая – вдогонку с первым с постоянной скоростью v. При каких значениях скорости вторая частица догонит первую?

Решение

1. Запишем уравнения движения частиц в виде следующей системы

$$\left.\begin{aligned} L + x &= vt; \\ x &= \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Совместное решение уравнений позволяет получить следующее соотношение в виде квадратного уравнения

$$at^2 - 2vt + 2L = 0,$$

решение которого представится в виде

$$t_{1,2} = \frac{v}{a} \pm \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - \frac{2L}{a}} = \frac{v}{a} \pm \sqrt{\frac{v^2 - 2aL}{a^2}} = \frac{v}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{v^2 - 2aL},$$

Встреча частиц может состояться при положительном значении подкоренного выражения, т.е. при

$$v \ge \sqrt{2aL}.$$

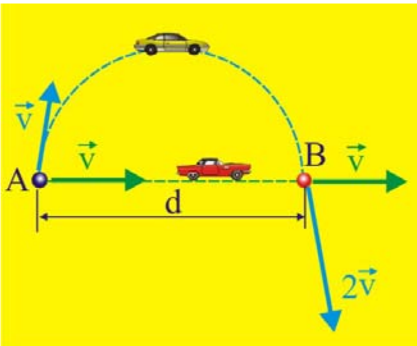

Рис. 1.138. Схема движения

1.138. Два автомобиля (рис. 1.138) стартуют одновременно с одинаковой скоростью из пункта А в пункт В. Первый из них движется по кратчайшему расстоянию между пунктами с постоянной скоростью, а второй перемещается по объездной дороге в виде полукольца, увеличивая скорость к концу маршрута вдвое. Какой автомобиль достигнет пункта В раньше?

Решение

1. Уравнение прямолинейно движущегося автомобиля с постоянной скоростью v

$$d = vt_1.$$

2. Уравнение движения автомобиля по полуокружности

$$\frac{\pi d}{2} = vt_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

Ускорение при криволинейном движении определится как:

$$a_2 = \frac{2v - v}{t_2} = \frac{v}{t_2}.$$

3. Образуем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} d &= vt_1; \\ \frac{\pi d}{2} &= \frac{3}{2}vt_2. \end{aligned}\right\}$$

4. Определим соотношение времён движения, поделив уравнения, друг на друга

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\pi}{3} \cong 1{,}05,$$

т.е. прямолинейно двигавшийся автомобиль придёт немного раньше.

1.139. Выполнив перестроение из одного ряда движения в другой ряд со скоростью v_1 = 80 км/час (рис. 1.139), водитель легкового автомобиля, к своему удивлению, обнаружил на расстоянии s = 10 м перед капотом грузовик, неспешно движущийся с постоянной скоростью v_2 = 44 км/час. С каким ускорением должен тормозить легковой автомобиль, чтобы не «догнать» грузовик?

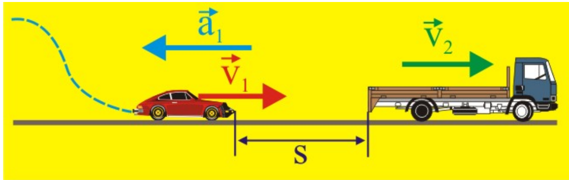

Рис. 1.139. Схема движения автомобилей

Решение

1. Запишем уравнения движения легкового автомобиля

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_2 + a_1 t_1; \\ s &= (v_1 - v_2)t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения время t_1

$$t_1 = \frac{v_1 - v_2}{a_1},$$

и подставим его значение во второе уравнение

$$s = \frac{(v_1 - v_2)^2}{a_1} - \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a_1} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a_1},$$

Откуда

$$a_1 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2s}.$$

1.140. За легковым автомобилем, движущимся по трассе со скоростью v_1 = 54 км/час, на расстоянии s_1 = 20 пристроился автобус, несущийся со скоростью v_2 = 90 км/час (рис. 1.140). С каким минимальным ускорением легковушка должна пойти в отрыв, чтобы интервал между бамперами машин оставался не менее s_2 = 5 м? Считать движение автобуса равномерным, а легкового автомобиля – равноускоренным.

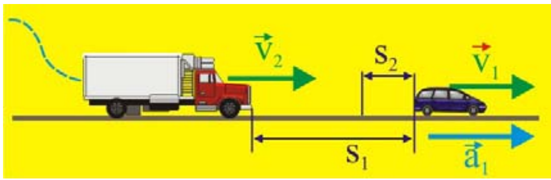

Рис. 1.140. Экстренный разгон

Решение

1. Запишем уравнения движения легкового автомобиля с учётом необходимости сохранения расстояния s_2

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_2 - a t_1; \\ (s_1 - s_2) &= (v_2 - v_1)t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из уравнения скорости время t_1

$$t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a_1},$$

и подставим это значение в уравнение пути

$$(s_1 - s_2) = (v_2 - v_1)\frac{(v_2 - v_1)}{a_1} - \frac{a_1}{2}\frac{(v_2 - v_1)^2}{a_1^2},$$

$$2a_1(s_1 - s_2) = (v_2 - v_1)^2,$$

$$a_1 = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2(s_1 - s_2)} = \frac{(25 - 15)^2}{2(20 - 5)} \cong 3{,}33\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

1.141. Две частицы движутся прямолинейно в соответствии с уравнениями

$$x_1 = 5t + 0{,}2t^2;$$

$$x_2 = 24 - 4t.$$

Найти время t_0 и координату x_0 их встречи. Определить местонахождения первой частицы x_1 в момент времени, когда вторая частица находилась в точке x_2 =0.

Решение

1. Первая частица движется равноускоренно с ускорением 0,4 м/с^2 с начальной скоростью $v_{1(0)}$ = 5 м/с и начальной координатой $x_{1(0)}$ = 0. Вторая частица первоначально находится от первой на расстоянии $x_{2(0)}$ = 24 м, и перемещается навстречу с постоянной скоростью v_2 = 4 м/с.

2. Поскольку при встречи частиц значение их координат совпадает, то приравнивая уравнения, можно определить время встречи

$$24 - 4t = 5t + 0{,}2t^2; \quad \Rightarrow \quad t^2 + 45t - 120 = 0;$$

$$t_0 = -22{,}5 + \sqrt{506 + 120} \cong 2{,}52\,\text{с}.$$

3. Координату, соответствующую встрече частиц, определим, подставив значение t_0 во второе уравнение движения

$$x_0 = 24 - 4 \cdot 2{,}52 = 13{,}91\,\text{м}.$$

4. Определим время прохождения второй частицей нулевой отметки x_2 = 0

$$24 - 4t_x = 0; \quad \Rightarrow \quad t_x = 6\,\text{с}.$$

5. Подставим значение t_x в уравнение движения первой частицы

$$x_x = 30 + 7{,}2 = 37{,}2\,\text{м}.$$

1.142. Координаты частиц изменяются во времени в соответствии с уравнениями

$$x_1 = -3 + 2t + t^2;$$

$$x_2 = 7 - 8t + t^2.$$

Определить относительную скорость частиц v в момент их встречи.

Решение

1. В начальный момент времени частицы находятся в координатах: x_1 = – 3 м, x_2 = 7 м, частицы движутся с одинаковыми ускорениями $a_1 = a_2$ = 2 м/с^2 и со скоростями

$$v_1 = 2 + 2t^2;$$

$$v_2 = -8 + 2t^2.$$

2. Определим время встречи частиц t_0, приравняв их координаты

$$-3 + 2t_0 + t_0^2 = 7 - 8t_0 + t_0^2; \quad \Rightarrow \quad t_0 = 1{,}67\,\text{с}$$

3. Найдём скорости частиц в момент их встречи

$$v_1 = 2 + 2 \cdot 1{,}67^2 = 7{,}58\,\text{м/с}; \quad v_2 = -8 + 2 \cdot 1{,}67^2 = 2{,}42\,\text{м/с}$$

4. Так как частицы движутся в противоположных направлениях, то относительная их скорость будет равна сумме скоростей

$$v_r = v_1 + v_2 = 10\,\text{м/с}.$$

1.143. Две частицы начинают движение вдоль одной прямой из состояния покоя навстречу друг другу с одинаковыми ускорениями $a_1 = a_2$ = 4 м/с^2. Какова их относительная скорость в момент встречи, если в начальный момент времени расстояние между частицами составляет s = 100 м?

Решение

1. Используя уравнение движения частиц, можно определить время прохождения ими расстояния до встречи :

$$\frac{s}{2} = \frac{at^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{s}{a}}.$$

2. Запишем далее уравнения скоростей частиц

$$v_1 = v_2 = at = a\sqrt{\frac{s}{a}}.$$

3. При встречном движении частиц относительная скорость частиц определится в виде суммы их скоростей:

$$v_r = v_1 + v_2 = 2at = 2a\sqrt{\frac{s}{a}} = 2\sqrt{as} = 40\,м/c.$$

1.144. Задан закон относительного движения двух частиц: частицы А относительного частицы В

$$x_r = t^2 - 2t + 1,$$

А так же закон движения частицы А:

$$x_A = 1 - t^2.$$

Найти ускорения и скорости частиц для момента времени t_1 = 1 с.

Решение

1. Получим уравнение движения частицы В

$$x_B = x_r - x_A = 2t^2 - 2t.$$

2. Из уравнений движения частиц образуем систему

$$\left.\begin{aligned} x_A &= 1 - t^2; \\ x_B &= 2t^2 - 2t. \end{aligned}\right\}$$

3. Анализ уравнений позволяет определить искомые параметры движения частиц: $a_A = -2$ м/с^2, $a_B = -4$ м/с^2, $v_A = -2t_1 = -2$ м/с, $v_B = -2$ м/с.

1.145. Автомобиль начинает спускаться с горы без начальной скорости, за время t = 60 с он приобретает скорость v_2 = 7,5 м/с. Одновременно в гору начинает подниматься второй автомобиль, имеющий начальную скорость v_0 = 20 м/с и уменьшающий через t = 60 с скорость до v_1 = 8 м/с. Какое расстояние будет между автомобилями через t_1 = 80 с после начала движения, если длина спуска составляет L = 2000 м. Автомобили движутся равноускоренно.

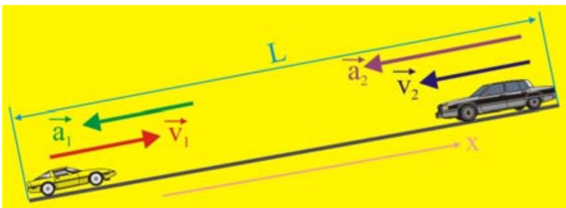

Рис. 1.145. Движение на подъёме и спуске

Решение

1. Определим величины ускорений автомобилей

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{v_0 - v_1}{t} = 0{,}2\frac{м}{c^2}; \quad a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{v_2}{t} = 0{,}125\frac{м}{c^2}.$$

2. Определим расстояния, пройденные автомобилями за время t_1

$$s_1 = v_0 t - \frac{a_1 t_1^2}{2} = 20 \cdot 80 - \frac{0{,}2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^3}{2} = 960\,м;$$

$$s_2 = \frac{a_2 t_1^2}{2} = \frac{0{,}125 \cdot 6{,}4 \cdot 10^3}{2} = 400\,м.$$

3. Расстояние между автомобилями через t_1 = 80 с движения

$$x = \left(\frac{L}{2} - s_1\right) + \left(\frac{L}{2} - s_2\right) = (1000 - 960) + (1000 - 400) = 640\,м.$$

1.146. Частица с начальной скоростью v_0 = 20 м/с с ускорением a_1 = 1 м/с^2 начинает двигаться прямолинейно. Через τ = 30 с из той же точки вслед за первой частицей вдогонку без начальной скорости начинает двигаться другая частица с ускорением a_2 = 2 м/с^2. Через какое время вторя частица догонит первую частицу?

Решение

1. Запишем уравнения движения частиц с учётом задержки начала перемещения второй частицы

$$x_1 = v_0(t+\tau) + \frac{a_1}{2}(t+\tau)^2; \quad x_2 = \frac{a_2 t^2}{2}.$$

2. Приравняем координаты частиц на основании их равенства в момент времени t

$$v_0(t+\tau) + \frac{a_1}{2}(t+\tau)^2 = \frac{a_2 t^2}{2}.$$

3. Образуем квадратное уравнение относительно искомого времени

$$2v_0(t+\tau) + a_1(t+\tau)^2 = a_2 t^2,$$

$$2v_0 t + 2v_0\tau + a_1\left(t^2 + 2t\tau + \tau^2\right) = a_2 t^2,$$

$$2v_0 t + 2v_0\tau + a_1 t^2 + 2a_1 t\tau + a_1\tau^2 = a_2 t^2;$$

$$t^2(a_2 - a_1) - t\frac{2(v_0 + a_2\tau)}{a_2 - a_1} - 2v_0\tau - a_1\tau^2 = 0,$$

Решение которого можно представить в виде:

$$t = \frac{(v_0 + a_2\tau) + \sqrt{(v_0 + a_2\tau)^2 - a_2\tau^2(a_2 - a_1)}}{a_2 - a_1},$$

$$t = \frac{(20+60) + \sqrt{(20+60)^2 - 2\cdot 900\cdot 1}}{1} \cong 148\,c.$$

1.147. Тело с начальной скоростью v_1 = 3 м/с и ускорением a_1 = 0,2 м/с начинает двигаться из точки А прямолинейно в точку В, отстоящую на расстоянии L = 3460 м. Через время t_1 = 20 с из точки В в точку А начинает равноускоренно двигаться второе тело с начальной скоростью v_2 = 7 м/с. Через время t = 100 с после начала движения первого тела, они встретились. Найти ускорение и скорость второго тела в момент встречи.

Решение

1. Запишем уравнение движения первого тела, которое стартует в нулевой момент времени и до встречи движется t = 100 с, из которого определим расстояние x_1, пройденное этим телом до встречи

$$x_1 = v_1 t + \frac{a_1 t^2}{2} = 3\cdot 100 + \frac{0{,}2\cdot 10^4}{2} = 1300\,м.$$

2. Определим расстояние, пройденное до встречи вторым телом

$$x_2 = L - x_1 = 2160\,м.$$

3. Запишем далее уравнение движения второго тела, из которого определим ускорение a_2

$$x_2 = v_2(t - t_1) + \frac{a_2}{2}(t - t_1)^2,$$

$$a_2 = \frac{2[x_2 - v_2(t - t_1)]}{(t - t_1)^2} = \frac{2[2160 - 7(100 - 20)]}{(100 - 20)^2} = 0{,}5\frac{м}{с^2}$$

4. Найдём скорость второго тела

$$v_3 = v_2 + a_2(t - t_1) = 7 + 0{,}5\cdot 80 = 47\frac{м}{с}.$$

1.148. Мимо поста доблестной ДПС пронёсся джип с постоянной скоростью v_1 = 20 м/с. ровно через время t = 120 с от поста ДПС отправляется в том же направлении другой автомобиль, который в течение t_1 = 25 с движется равноускоренно, а по достижении скорости v_2 = 25 м/с продолжает движение с постоянной скоростью. На каком расстоянии, отсчитываемом от времени начала движения второго автомобиля, второй автомобиль нагонит первый автомобиль и сколько времени для этого потребуется?

Решение

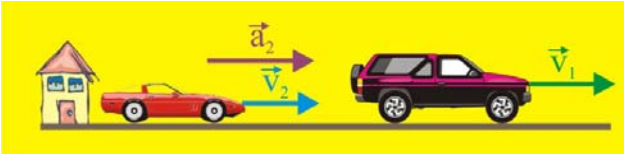

Рис. 1.148. Схема движения

1. Автомобиль, движущийся всё время с постоянной скоростью v_1 за время относительно времени старта второго автомобиля до места их встречи пройдёт расстояние

$$x_1 = v_1(t_B + t).$$

2. Второй автомобиль, с двумя режимами движения до места встречи пройдёт расстояние

$$x_2 = v_2 t_B - \frac{a_2 t_1^2}{2}.$$

3. Величину ускорения второго автомобиля, стартующего без начальной, скорости определим из уравнения для скорости равноускоренного движения

$$v_2 = a_2 t_1; \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{v_2}{t_1}.$$

4. Подставим значение ускорения в уравнение движения второго автомобиля

$$x_2 = v_2 t_B - \frac{v_2 t_1}{2}.$$

5. Из условия равенства координат в момент времени t_B, когда второй автомобиль догонит первый автомобиль, можно записать

$$v_2 t_B - \frac{v_2 t_1}{2} = v_1(t_B + t),$$

откуда

$$2v_2 t_B - v_2 t_1 = 2v_1 t_B + 2v_1 t.$$

6. Решая последнее уравнение относительно t_B, получим

$$t_B = \frac{2v_1 t + v_2 t_1}{2(v_2 - v_1)} = \frac{2\cdot 20\cdot 120 + 25\cdot 25}{2(25-20)} = 542\,\text{с} \cong 9\ \text{мин}.$$

7. Место встречи определится уравнением

$$x_B = v_1(t_B + t) = 20\cdot 662 = 13{,}2\,\text{км}.$$

Движение тела, брошенного вертикально

1.149. Тело брошено вертикально вниз с высоты h = 40 м со скоростью v_0 = 25 м/с. Какой скоростью будет обладать тело в момент соприкосновения с поверхностью земли? Какую скорость приобрело бы тело, если его бросили бы с с такой же скоростью вертикально вверх?

Решение

1. Запишем кинематические уравнения движения тела

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + gt; \\ h &= v_0 t + \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения время и подставим полученное значение во второе уравнение

$$t = \frac{v - v_0}{g},$$

$$h = v_0 \frac{v - v_0}{g} + \frac{g}{2}\frac{(v - v_0)^2}{g^2} = \frac{vv_0 - v_0^2}{g} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2g},$$

$$2gh = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2.$$

3. Решим последнее уравнение относительно искомой скорости, приняв ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{25^2 + 2\cdot 10\cdot 40} \approx 38{,}1\ \text{м/с}.$$

4. Найдём высоту подъёма тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 = 25 м/с

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{625}{20} = 31{,}25\,\text{м}.$$

5. Определим скорость тела, падающего с высоты $h + h_1$ = 71,25 м

$$v_1 = \sqrt{2g(h + h_1)} = \sqrt{20\cdot 71{,}25} \cong 38\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.150. Тело брошено вертикально вверх в начальной скоростью v = 19,6 м/с. Через какое время тело окажется в высшей точке своей траектории и в точке броска?

Решение

1. Запишем уравнение скорости, из которого определим время подъёма t_1 в высшую точку траектории

$$v = v_0 - gt; \quad v = 0; \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \cong 2\,\text{с}.$$

2. Определим высоту подъёма тела над точкой броска

$$h = v_0 t - \frac{gt_1^2}{2} \cong 20\cdot 2 - \frac{10\cdot 4}{2} = 20\,\text{м}.$$

3. Найдём время свободного падения тела с высоты h и общее время движения τ

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\,\text{с}; \quad \tau = t_1 + t_2 = 4\,\text{с}.$$

1.151. Во сколько раз надо увеличить начальную скорость тела, чтобы при вертикальном броске высота его подъёма увеличилась в 4 раза.

Решение

1. Высоты подъёма тела, брошенного вертикально вверх разными начальными скоростями, определятся как

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g}; \quad h_2 = 4h_1 = \frac{v_2^2}{2g};$$

2. Поделим уравнения высот друг на друга

$$\frac{4h_1}{h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{4}; \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2v_1.$$

1.152. Свободно падающее тело в некоторый момент времени находилось на высоте h_1 = 1100 м, а спустя время t = 10 с – на высоте h_2 = 120 м над поверхностью земли. С какой высоты падало тело?

Решение

1. Определим скорость тела на высоте h_1

$$(h_1 - h_2) = \Delta h = v_1 t + \frac{gt^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{t}\left(\Delta h - \frac{gt^2}{2}\right) = \frac{1}{10}\left(980 - \frac{10 \cdot 100}{2}\right) = 4{,}8\,\frac{м}{с}.$$

2. Запишем уравнение скорости при прохождении телом расстояния Δh

$$v_2 = v_1 + gt; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_2 - v_1}{g}; \quad \Rightarrow \quad v_2 = gt + v_1 = 104{,}8\,\frac{м}{с}$$

3. Определим высоту, с которой падало тело до достижения им скорости v_1

$$h_3 = \frac{gt_1^2}{2}; \quad v_1 = gt_1; \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_1}{g}; \quad \Rightarrow \quad h_3 = \frac{v_1^2}{2g} = 1{,}15\,м.$$

4. Определим суммарную высоту падения

$$h_\Sigma = h_1 + h_2 + h_3 = 1100 + 120 + 1{,}15 \cong 1221\,м.$$

1.153. Ещё в далёком 1934 г. парашютист Евдокимов пролетел в затяжном прыжке, не раскрывая парашюта, h = 7680 м за время t = 142 с. На сколько сопротивление воздуха увеличило время падения испытателя?

Решение

1. Определим время свободного падения парашютиста без учёта сопротивления воздуха

$$h = \frac{gt_0^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 39{,}2\,с.$$

2. Найдём увеличения времени падения за счёт влияния силы сопротивления

$$\Delta t = t - t_0 = 102{,}8\,с.$$

1.154. С какой начальной скоростью нужно бросить тело вертикально вниз с высоты h = 19,6 м, чтобы оно упало на Δt = 1 с быстрее тела, свободно падающего с той же высоты?

Решение

1. Определим время свободного падения тела из состояния покоя

$$h=\frac{gt_1^2}{2};\quad\Rightarrow\quad t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 19{,}6}{2}}\cong 2\,с\,.$$

2. Запишем уравнение падения тела с заданной высоты с начальной скоростью v_0 с учётом заданного временного условия Δt

$$h=v_0(t_1-\Delta t)+\frac{g}{2}(t_1-\Delta t)^2\,.$$

3. Решая полученное уравнение относительно v_0, получим

$$v_0=\frac{2h-g\left(t_1^2+2\Delta tt_1-\Delta t^2\right)}{2(t_1-\Delta t)}=\frac{2\cdot 19{,}6-10(4-4-1)}{2}\cong 14{,}6\frac{м}{с}\,.$$

1.155. Тело свободно падает с высоты h = 100 м. За какое время тело проходит первый и последний метр своего пути? Какой путь проходит тело за первую и последнюю секунды своего движения?

Решение

1. Найдём время свободного падения тела с высоты h_1 = 1м, т.е. время прохождения первого метра свободного полёта

$$h_1=\frac{g\tau_{(1)}^2}{2};\quad\Rightarrow\quad \tau_{(1)}=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}=\sqrt{0{,}2}\approx 0{,}47\,с\,.$$

2. Определим время свободного падения с высоты h = 100 м

$$t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{20}=4{,}47\ с\,.$$

3. Найдём время падения с высоты h_2 = 99 м

$$t_2=\sqrt{\frac{2h_2}{g}}=\sqrt{19{,}8}=4{,}45\,с\,.$$

4. Время пролёта последнего метра свободного падения

$$t_3=t_0-t_2=0{,}023\,с\,.$$

5. Определим расстояние, пройденное свободно падающим телом в первую секунду своего движения (τ = 1 с)

$$y_{(1)}=\frac{g\tau^2}{2}=5\,м\,.$$

6. Время пролёта последнего метра свободного падения

$$\tau_{(99)}=t_0-1=3{,}47\,с\,.$$

7. Расстояние, пройденное за 99 секунд свободного падения

$$y_{(10)}=\frac{g\tau_{(100)}^2}{2}=5\cdot 3{,}47^2\cong 60\,м\,.$$

8. Расстояние, пройденное за последнюю секунду

$$y_{(100)}=h-y_{(99)}=40\,м\,.$$

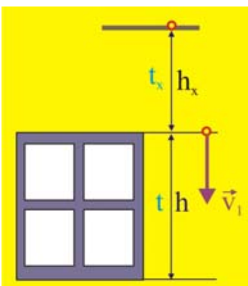

Рис. 1.156. Падение

1.156. С крыши дома оторвалась сосулька и за время t = 0,2 с пролетела мимо окна, высотой h = 1,5 м. С какой высоты h_x относительно верхнего края окна сорвалась сосулька?

Решение

1. Запишем уравнение движения сосульки мимо окна

$$h=v_1t+\frac{gt^2}{2},$$

из которого можно определить величину скорости, которую имела сорвавшаяся с крыши сосулька в момент достижения верхнего уровня окна

$$v_1 = \frac{h_1}{t} - \frac{gt^2}{2} = \frac{1{,}5}{0{,}2} - \frac{10\cdot 0{,}2}{2} = 6{,}5\,\frac{м}{с}.$$

2. Считая v_1 конечной скоростью, для участка падения сосульки крыша – окно, найдём время полёта до окна t_x

$$v_1 = gt_x; \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{v_1}{g} = 0{,}65\,с.$$

3. Расстояние между местом отрыва сосульки и верхним уровнем окна

$$h_x = \frac{gt_x^2}{2} = \frac{10\cdot 0{,}65^2}{2} = 2{,}11\,м.$$

1.157. Мяч, отскочивший от поверхности земли вертикально вверх (рис. 1 157) с начальной скоростью v_0 = 10 м/с, пролетел мимо окна высотой h = 1,5 м, за время t = 0,2 с. На какой высоте относительно земли находится подоконник?

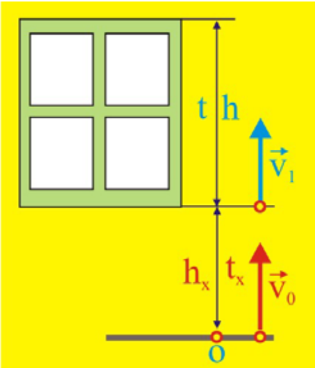

Рис. 1.157. Отскок мяча

Решение

1. Запишем уравнение, описывающее пролёт мяча перед окном и определим из него начальную скорость v_1 для этого участка равнозамедленного движения

$$h = v_1 t - \frac{gt^2}{2}; \Rightarrow v_1 = \frac{h}{t} + \frac{gt^2}{2} = 8{,}5\,\frac{м}{с}.$$

2. Определим время полёта мяча от поверхности земли до нижней кромки окна h_x

$$v_1 = v_0 - gt_x; \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{v_0 - v_1}{g} = 0{,}15\,с.$$

3. Найдём высоту подоконника h_x

$$h_x = v_0 t_x - \frac{gt_x^2}{2} \cong 1{,}37\,м.$$

1.158. Тело, свободно падающее с некоторой высоты (рис. 1.158), последние Δh = 200 м прошло за время Δt = 4 с. Какое время и с какой высоты падало тело? Установить зависимости скорости и ускорения тела от времени.

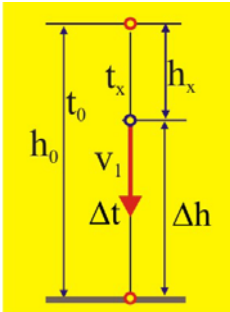

Рис. 1.158. Падение тела

Решение

1. Из уравнения прохождения телом последних 200 м определим величину скорости v_1

$$\Delta h = v_1\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}; \quad \Leftarrow \quad v_1 = \frac{\Delta h}{t} - \frac{g\Delta t}{2} = 30\,\frac{м}{с}.$$

2. Определим время t_x пролёта высоты h_x

$$v_1 = gt_x; \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{v_1}{g} = 3\,с.$$

3. Определим величину отрезка пути h_x

$$h_x = \frac{gt_x^2}{2} = 45\,м.$$

4. Величина h_0 определится в виде суммы

$$h_0 = h_x + \Delta h = 245\,м.$$

5. Общее время полёта тела t_0

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cong 7\,с.$$

6. Определим максимальную скорость тела в момент касания земли

$$v_{max} = gt_0 = 70\frac{м}{с},$$

скорость будет линейно от нуля до v_{max}, в то время как ускорение будет постоянным и равным $g \approx 10$ м/с^2.

1.159. Тело падает без начальной скорости с высоты h_0 = 45 м. Определить среднюю скорость падения тела на второй половине пути.

Решение

1. Определим время пролёта первой половины пути

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 22{,}5}{10}} = \sqrt{4{,}5} = 2{,}12\,с.$$

2. Определим скорость в конце первой половины пути, что соответствует началу второй половины пути

$$v_1 = gt_1 = 21{,}2\frac{м}{с}.$$

3. Определим время всего полёта

$$h_0 = \frac{gt_0^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{9} = 3\,с.$$

4. Найдём скорость в момент соприкосновения тела с поверхностью земли

$$v_2 = gt_0 = 30\frac{м}{с}.$$

5. Средняя скорость на второй половине пути падающего тела

$$< v_2 >= \frac{v_1 + v_2}{2} \cong 25{,}6\frac{м}{с}.$$

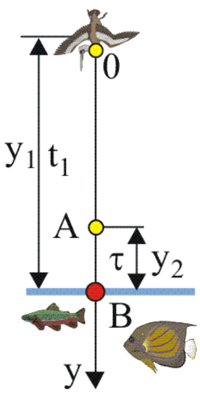

Рис. 1.160. Пеликан

1.160. Пеликан охотится за рыбкой (рис. 1.160), падая свободно с высоты 25 м. Если у рыбки есть 0,15 с времени, то она может уклониться от прожорливой птицы. На какой высоте над поверхностью воды рыбка должна заметить пеликана, если она плавает у поверхности?

Решение

1. Определим время падения пеликана до поверхности воды (точка B)

$$y_1 = \frac{gt_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cong 2{,}24с.$$

2. Определим далее время полёта птицы до точки A, где её должна заметить рыбка

$$t_2 - \tau = 2{,}09с.$$

3. Найдём расстояние OA, т.е. расстояние которое пролетит пеликан

$$y_3 = \frac{gt_2^2}{2} \cong 20{,}6м.$$

4. Искомая безопасная для рыбки высота определится в виде разности

$$y_2 = y_1 - y_3 = 4{,}4м.$$

1.161. Ракета с поверхности Земли поднимается вертикально вверх с ускорением a = 10 м/с^2. Через время t_2 = 10с после старта от неё отделяется первая ступень. Через какое время t_3 эта ступень упадёт на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

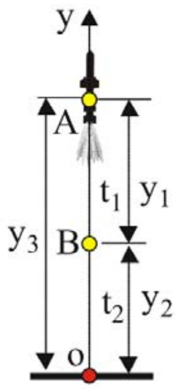

Рис. 1.161. Ракета

Решение:

1. Высота подъёма ракеты до момента отделения третьей ступени

$$y_2 = \frac{gt_2^2}{2} \cong 500\text{м}.$$

2. Начальная скорость отделившейся ступени равна скорости ракеты

$$v_0 = at_2 = 100\,\text{м/с}.$$

3. Время до остановки, отделившейся ступени

$$t_0 = \frac{v_0}{g} = 10\text{с}.$$

4. Расстояние, пройденное ступенью до полной её остановки

$$y_3 = \frac{gt_0^2}{2} = 500\text{м}.$$

5. Время падения ступени

$$t_3 = \sqrt{\frac{2(y_1 + y_2)}{g}} \cong 14{,}1\text{с}.$$

1.162. Жонглер бросает вертикально вверх с одинаковый высоты с начальной скоростью v_0 = 5 м/с шарики через каждые t = 0,2 с. На каком расстоянии друг от друга будут находиться два первых шарика в момент, когда циркач пульнёт четвёртый шар? С какой скоростью они будут двигаться друг относительно друга? Каким количеством шаров он может жонглировать одновременно?

Решение

1. Определим максимальную высоту подъёма шариков, брошенных с заданной начальной скоростью v_0

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}25\,\text{м},$$

при этом, первый шарик будет подниматься в высшую точку своей траектории и опускаться на уровень броска одинаковое время t_1

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = 0{,}5\,\text{с}.$$

2. К моменту бросания четвёртого шарика пройдёт время t_4 = 0,8 с, следовательно, первый шарик к этому времени будет свободно падать и за t_1^* = 0,3 с опустится относительно уровня броска на высоту y_1

$$y_1 = \frac{gt_1^*}{2} = 0{,}45\,\text{м}.$$

3. Второй шарик бросят за t_2 = 0,6 с перед броском четвёртого шарика, значит он в течение времени t_2^* = 0,1 с подниматься вверх

$$h_2 = v_0 t_2^* - \frac{gt_2^*}{2} = 0{,}45\ \text{м},$$

т.е. окажется над уровнем броска на высоте $y_2 = 1{,}2\,\text{м}$, расстояние между шариками составит $\Delta y = y_2 - y_1 = 0\,м$, т.е. шарики находятся в момент броска четвёртого шарика на одной высоте относительно уровня броска.

4. Первый шарик будет падать со скоростью

$$v_1 = gt_1^* = 3\,м/с,$$

второй шарик тоже будет падать, но со скоростью

$$v_2 = gt_2^* = 1\,м/с.$$

Поскольку шарики движутся в противоположных направлениях, то относительная скорость запишется в виде разности скоростей

$$v_r = v_1 - v_2 = 2\,м/с.$$

5. Поскольку движение одного шарика продолжается 1 с, то с интервалом в 0,2 с циркач может работать одновременно с пятью шариками.

1.163. Два тела, расположенные на одной вертикали на расстоянии L = 1 м друг от друга, начинают одновременно, без начальной скорости падать вертикально вниз. По какому закону будет меняться расстояние между телами?

Решение

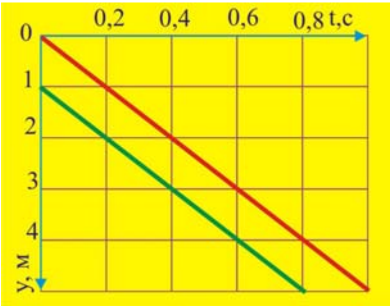

Рис. 1.163. Падение тел

1. Поскольку движение тел происходит в одинаковых условиях, то координаты тел будут изменяться синхронно и расстояние меду ними будет сохраняться первоначальным

$$s = L = 1\,м,$$

на рис. 1.163 приведены зависимости координат тел от времени, за начало отсчёта принято положение первого, выше расположенного тела, вертикальная координата совпадает с направлением движения тел.

1.164. Два тела, расположенные на одной высоте, начинают свободно падать с интервалом Δt = 2 с. Как будет меняться расстояние между телами в течение Δt, если за начало отсчёта $t_0 = 0$ принять момент падения первого тела.

Решение

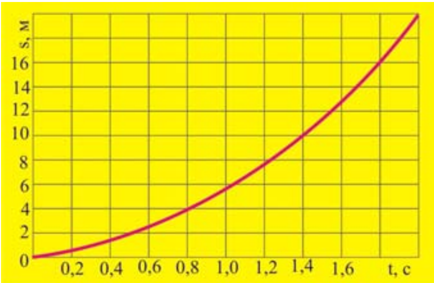

Рис. 1.164. Сближение тел

1. Если отсчитывать время от момента падения первого тела, то в течение промежутка Δt второе тело будет приближаться к первому в соответствии с уравнением

$$s = \frac{g\Delta t^2}{2},$$

т.е. координата второго тела изменяется по параболическому закону

1.165. Тело с начальной скоростью v_0 = 15 м/с брошено вертикально вверх с высоты h = 20 м над поверхностью земли. Определить среднюю скорость движения <v> и среднюю путевую скорость v за время полёта.

Решение

1. Время полёта тела вверх и высота подъёма над точкой бросания

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = 1,5\frac{м}{с}; \quad h_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 11,25\,м$$

2. Расстояние, пройденное телом за всё время движения

$$h_\Sigma = h + h_1 = 31{,}5\,\text{м}$$

3. Время падения тела с высоты h_Σ

$$t_\Sigma = \sqrt{\frac{2h_\Sigma}{g}} = 2{,}5\,\text{с}\,.$$

4. Полное время движения тела до падения на поверхность

$$\tau = t_1 + t_\Sigma = 4\,\text{с}\,.$$

5. Перемещение тела в данном случае будет равно $\Delta r = h = 20$ м, а время движения $\tau = 4$ с, поэтому, средняя скорость будет равна

$$< v >= \frac{\Delta r}{\tau} = 5\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

6. Пройденный телом путь, до падения на поверхность

$$s = 2h_1 + h = 22{,}5 + 20 = 42{,}5\,\text{м}\,.$$

7. Средняя путевая скорость равна отношению пройденного пути к времени, за которое этот путь пройден, т.е.

$$v = \frac{s}{\tau} \cong 10\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

1.166. Ракета стартует вертикально вверх с ускорением a = 2g. Через t_0 = 20 с двигатель ракеты отключается. Через какое время после старта ракета упадёт на поверхность земли. Построить зависимости ускорения, скорости, координаты и пройденного пути от времени.

Решение

1. Скорость ракеты в момент выключения двигателя

$$v_1 = at_0 = 2gt_0 = 400\,\text{м/с}\,.$$

3. Высота подъёма ракеты до выключения двигателя

$$h_1 = \frac{2gt_0^2}{2} = 4\,\text{км}\,.$$

4. Время движения ракеты по инерции

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = 40\,\text{с}\,.$$

5. Высота подъёма в высшую точку траектории относительно уровня, на котором выключился двигатель

$$h_2 = v_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 8\,\text{км}\,.$$

6. Высота подъёма ракеты над уровнем старта с поверхности земли

$$h_o = h_1 + h_2 = 12\,\text{км}$$

7. Время падения ракеты с высоты h_o

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 50\,\text{с}\,.$$

8. Суммарное время движения ракеты от старта до падения на землю

$$t_\Sigma = t_0 + t_1 + t_2 = 110\,\text{с}\,.$$

9. Скорость соприкосновения обломков ракеты с землёй

$$v_2 = \sqrt{2gh_o} = 490\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$

9. На рис. 1.166 приведены графические зависимости ускорения, скорости, координаты и пути ракеты от времени

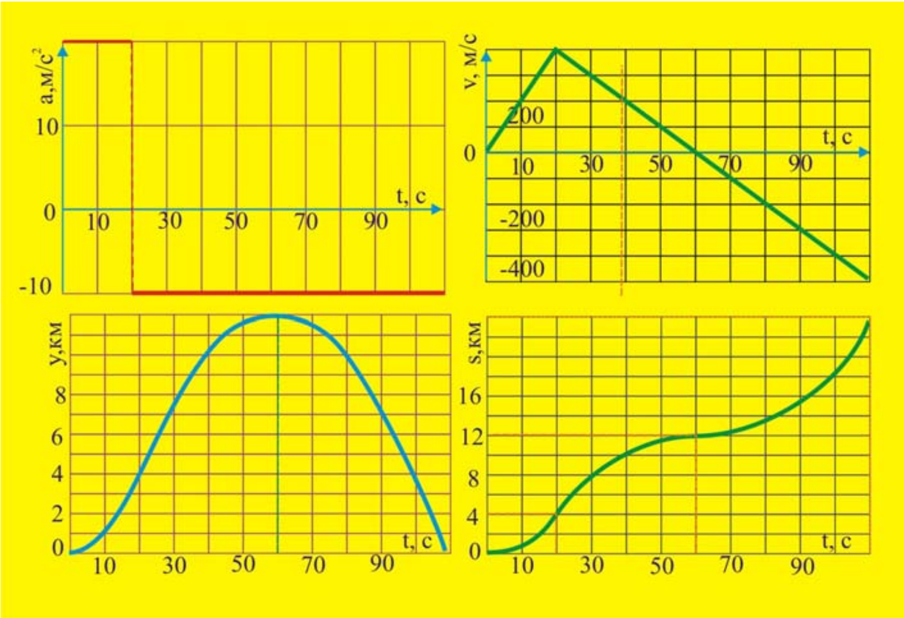

Рис. 1.166. Зависимости ускорения, скорости, координаты и пути от времени

1.167. Аэростат поднимается с земли вертикально вверх равноускоренно, и за время t_1 = 10 с достигает высоты h = 100 м. Через t_2 = 5 с из гондолы выпадает некий небольшой предмет без начальной скорости относительно шара начинает движение. Какой максимальной высоты достигает предмет? Какое расстояние будет между шаром в момент достижения предметом земли? С какой скоростью камень упадёт на землю. Построить зависимости скорости предмета, его координаты и пройденного пути от времени.

Решение

1. Определим ускорение воздушного шара

$$h = \frac{at_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2h}{t_1^2} = \frac{200}{100} = 2\frac{м}{с^2}.$$

2. Высота, на которую поднимется шар за t_2 = 5 с своего полёта

$$h_1 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{2\cdot 25}{2} = 25 м.$$

3. Скорость шара при подъёме на высоту h_1

$$v_1 = at_2 = 10\frac{м}{с}.$$

4. Высота подъёма предмета после покидания им шара

$$h_2 = \frac{v_1^2}{2g} = 5 м.$$

5. Высота подъёма предмета над уровнем земли

$$H = h_1 + h_2 = 30 м.$$

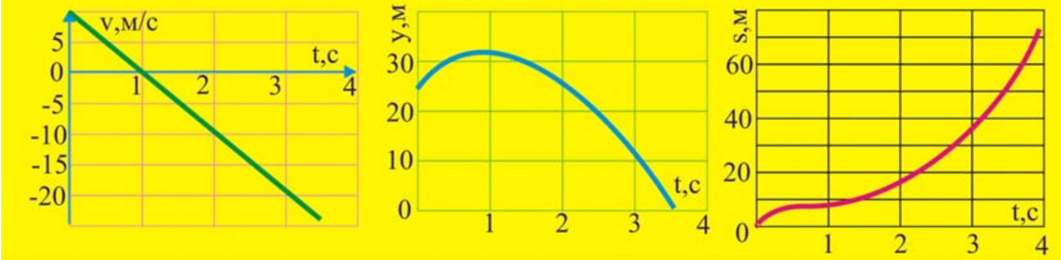

Рис. 1.167. Зависимость скорости, координаты и пройденного предметом пути от времени

6. Скорость предмета в момент его падения на поверхность земли

$$v_2 = -\sqrt{v_1^2 + 2gH} = -\sqrt{100 + 20\cdot 30} \cong -26\frac{м}{с}.$$

1.168. Аэростат поднимается с постоянной скоростью v_0. На высоте h с аэростата сбрасывается груз без начальной скорости относительно аппарата. Найти скорость соприкосновения предмета с землёй и время его полёта.

Решение

1. В самый начальный момент времени груз находится на высоте h и имеет скорость v_0, направленную по вертикали вверх, уравнения движения груза и его скорости представится так:

$$y(t) = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

$$v = v_0 - gt.$$

2. При соприкосновении с землёй y(t) = 0, поэтому

$$\frac{gt^2}{2} - v_0 t - h = 0; \quad t^2 - \frac{2v_0}{g} - \frac{2h}{g} = 0,$$

$$t = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{2g^2} + \frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{2gh + v_0^2}}{t}.$$

3. Конечная скорость груза определится как:

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}.$$

1.169. Парашютист опускается равномерно со скоростью u = 0,5 м/с. В какой-то момент времени парашютист подбрасывает вертикально вверх небольшое тело со скоростью v = 4,5 м/с относительно себя. Определить наибольшее расстояние между парашютистом и выброшенным телом.

Решение

1. Высота подъёма тела после броска

$$h_1 = \frac{(v-u)^2}{2g} = 0{,}8\,м.$$

2. Время подъёма тела в высшую точку траектории модно определить из уравнения скорости с учётом остановки тела в верхней точке

$$v_1 = v - gt; \quad v_1 = 0; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{g} = 0{,}45\,с.$$

3. Расстояние, пройденное парашютистом за время t

$$h_2 = ut = 0{,}225\,м\,/$$

4. Наибольшее расстояние между телом и парашютистом

$$h_{max} = h_1 + h_2 = 1{,}025\ м.$$

1.170. Парашютист, спускающийся равномерно со скоростью v = 5 м/с в момент, когда находится на высоте H = 100 м над поверхностью земли, бросил вертикально вниз небольшое тело со скоростью v_0 = 10 м/с относительно себя. Какой промежуток времени разделяет моменты приземления тела и парашютиста?

Решение

1. Время спуска до поверхности земли парашютиста

$$t_1 = \frac{H}{v} = 20\ \text{с}.$$

2. Начальная скорость брошенного тела

$$v_1 = v_0 + v = 15\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Запишем уравнение движения предмета вниз и разрешим его относительно времени падения

$$H = v_1 t + \frac{gt^2}{2}; \quad t^2 + \frac{2v_1}{g}t - \frac{2H}{g}.$$

$$t = -\frac{v_1}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_1^2 + 2gH} = -\frac{15}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{2225} \cong 3{,}2\ \text{с}.$$

4. Промежуток времени между приземлением парашютиста и падением предмета

$$\Delta t = t_1 - t \cong 16{,}8\ \text{с}.$$

1.171. Парашютист, опускающийся равномерно со скоростью v = 5 м/с бросает вертикально вверх небольшое тело со скоростью u = 10 м/с относительно себя. Через какое время t после броска тело и парашютист вновь окажутся на одной высоте? Чему равна скорость тела в этот момент?

Решение

1. Абсолютная скорость броска тела определится в виде разности

$$v_0 = u - v = 5\frac{\text{м}}{\text{с}},$$

т.е. начальная скорость тела по модулю совпадает со скоростью опускания парашютиста.

2. Запишем уравнения движения парашютиста и тела

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -vt; \\ y_2 &= vt - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

3. Нахождение тел на одной высоте означает равенство их координат

$$-vt = vt - \frac{gt^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4v}{g} \cong 2\text{с}.$$

4. Скорость тела в момент пролёта им парашютиста

$$v_1 = -(v + u) = -15\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.172. С воздушного шара, опускающегося вертикально вниз с постоянной скоростью v_1 = 2 м/с, бросили вертикально вверх камень со скоростью v_2 = 10 м/с относительно земли. Каким будет расстояние между шаром и камнем?

Решение

1. Высота подъёма камня

$$h_1 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{100}{20} = 5\text{м}.$$

2. Время подъёма камня в наивысшую точку траектории

$$v_2 - gt = 0; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_2}{g} = 1\ \text{с}.$$

3. Высота опускания воздушного нара за это время

$$h_2 = v_1 t = 2\ \text{м}.$$

4. Наибольшее расстояние между камнем и шаром

$$s = h_1 + h_2 \cong 7\ \text{м}.$$

1.173. Сосулька падает без сопротивления с крыши дома, пролетая первую половину пути за время t_1 = 1 с. Сколько времени ей осталось лететь до поверхности земли?

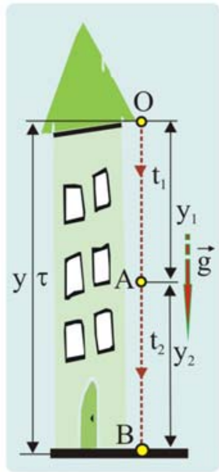

Рис. 1.173. Падение сосульки

1. Определим путь, проделанный сосулькой за первую секунду падения

$$y_1 = \frac{gt_1^2}{2} = 5\,\text{м}.$$

2. Высота, с которой падает сосулька, с учётом того обстоятельства, что первую половину пути она пролетела за время t_1

$$y = y_1 + y_2 = 2y_1 = 10\,\text{м}$$

3. Определим время полного падения, воспользовавшись третьим уравнением системы (2.34)

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{2} = 1{,}41\,\text{с}.$$

4. Время пролёта сосулькой второй половины пути определится в виде разности

$$t_2 = t - t_1 = 0{,}41\text{с}.$$

Как видно из полученного результата, вторая половина пути пролетается сосулькой быстрее первой за счёт того, что к концу первого участка сосулька приобретает скорость v_1 = 10 м/с.

1.174. Человек, находящийся в лифте, поднимающимся со скоростью v, с высоты H от пола роняет мяч. Определить промежуток времени между двумя последовательными отскоками мяча от пола, считая удары абсолютно упругими.

Решение

1. Поскольку удар абсолютно упругий, то время падения будет равно времени отскока в высшую точку траектории на высоту броска

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} + \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

1.175. Камень падает в ущелье. Через t = 6 с слышен звук удара камня о землю. Определить глубину ущелья, если скорость звука c = 330 м/с.

Решение

1. Пусть время падения камня t_1, а время распространения звука – t_2, в этом случае

$$t_1 + t_2 = t = 6\,\text{с}.$$

2. Запишем уравнение движения камня и уравнение распространения звука

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{gt_1^2}{2}; \\ h &= ct_2. \end{aligned}\right\}$$

3. Приравняем уравнения с учётом того, что $t_2 = t - t_2$

$$\frac{gt_1^2}{2} = c(t - t_1),$$

приходим к квадратному уравнению относительно t_1

$$t_1^2 + \frac{2c}{g}t_1 - \frac{2ct}{g} = 0,$$

откуда

$$t_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2cgt}}{g}.$$

4. Высота ущелья в этом случае определится как

$$h = c(t - t_1) = c\left(t - \frac{c + \sqrt{c^2 + 2cgt}}{g}\right) \cong 200\ \text{м}.$$

1.176. Камень сбрасывают с высоты H. Одновременно вертикально вверх бросают с земли шарик с начальной скоростью v_0. Определить время t, через которое встретятся камень и шарик. При какой скорости v_0 их встреча возможна?

Решение

1. Запишем уравнения движения камня и шарика

$$\left.\begin{aligned} h &= H - \frac{gt^2}{2}; \\ h &= v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Для момента встречи движущихся тел приравняем их координаты

$$H - \frac{gt^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда:

$$H = v_0 t,$$

следовательно,

$$t = \frac{H}{v_0}.$$

3. Запишем уравнения для времени падения камня и подъёма шарика в верхнюю точку своей траектории

$$H = \frac{gt_1^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}};$$

$$v_2 = v_0 - gt_2; \quad v_2 = 0; \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_0}{g}.$$

4. Встреча камня и шарика при движении шарика вверх может произойти при условии

$$t_2 \ge t_1; \quad \sqrt{\frac{2H}{g}} \le \frac{v_0}{g}; \quad \Rightarrow \quad v_0 \ge \sqrt{2gH}.$$

Прямолинейное переменное движение

1. 177. Частица движется прямолинейно согласно уравнению

$$x(t) = at + bt^3,$$

где a = 6 м/с, b = – 0,125 м/с^3 – постоянные коэффициенты. Определить скорость частицы для времени от t_1 = 2 с и t_2 = 6 с, а так же координату частицы при нулевом значении скорости.

Решение

1. Уравнение скорости, как известно, является первой производной уравнения координаты

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a + 3bt^2.$$

2. Скорость частицы в моменты времени:

$t_1 = 2$ с

$$v_{x(1)} = 6 - 3\cdot 0{,}125\cdot 4 = 4{,}5\,\frac{м}{с},$$

$t_2 = 6$ с:

$$v_{x(2)} = 6 - 3\cdot 0{,}125\cdot 36 = -7{,}5\,\frac{м}{с}$$

3. Определим время, при котором скорость будет равна нулю

$$v_x = 0; \quad \Rightarrow \quad a + 3bt^2 = 0; \quad a = -3bt^2; \quad t = \sqrt{-\frac{a}{3b}} = 4\text{ с}.$$

4. Пройденное за время t расстояние

$$x = 24 - 8 = 16\text{ м}.$$

1.178. Частица движется вдоль оси X по закону

$$x(t) = 2t^2 - 4t^3.$$

Определить величину ускорения для моментов времени: t_1 = 0,25 с и t_2 = 0,5 с.

Решение

1. Для определения ускорения заданное уравнение движения необходимо дважды продифференцировать по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t - 12t^2;$$

$$a_x = 4 - 24t.$$

2. Для заданных моментов времени ускорения будут иметь величины:

$$a_{x(1)} = 4 - 24\cdot 0{,}25 = -2\,\frac{м}{с^2};$$

$$a_{x(2)} = 4 - 12 = -8\,\frac{м}{с^2}.$$

1.179. Частица движется прямолинейно таким образом, что её скорость описывается уравнением

$$v = 3t^3 - 5t + 2.$$

Записать уравнение ускорения и определить его величину для времени t = 5 с.

Решение

1. Ускорение определяется в виде первой производной по времени от уравнения скорости

$$a = \frac{dv}{dt} = 9t^2 - 5;$$

поэтому в заданный момент времени величина ускорения определится как:

$$a_1 = 9 \cdot 25 - 5 = 220\frac{м}{с^2}.$$

1.180. Частица движется в положительном направлении оси X так, что её скорость изменяется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α – положительная постоянная. В момент времени t = 0 частица находилась в начале системы отсчёта x = 0. Найти зависимости скорости и ускорения частицы от времени. За какой промежуток времени частица пройдёт расстояние L?

Решение

1. Перепишем заданное уравнение скорости в виде

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x}.$$

2. Разделим в полученном дифференциальном уравнении переменные и проинтегрируем

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt; \quad x^{-\frac{1}{2}}dx = \alpha dt; \quad \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \alpha\int dt, \quad 2\sqrt{x} + C = \alpha t.$$

3. Постоянную интегрирования C определим по заданным начальным условиям, подставим в предыдущее уравнение t = 0

$$2\sqrt{x} \pm C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = 2\sqrt{x}; \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = \alpha t; \quad \sqrt{x} = \frac{\alpha t}{4}.$$

4. Подставим полученное соотношение в заданное уравнение скорости

$$v = \frac{\alpha^2 t}{4}.$$

5. Ускорение является первой производной скорости по времени

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2}{4}.$$

6. Получим зависимость координаты от времени

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha^2 t}{4}; \quad dx = \frac{\alpha^2}{4}tdt; \quad \Rightarrow \quad \int dx + C = \frac{\alpha^2}{4}\int tdt, \quad x = \frac{\alpha^2}{4}\frac{t^2}{2} = \frac{\alpha^2}{8}t^2.$$

7. Время, необходимое для прохождения расстояния L

$$L = \frac{\alpha^2}{8}t^2; \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{8L}{\alpha^2}}.$$

Движение материальной точки на плоскости

1.181. Частица перемещается в плоскости из точки 1 с координатами ($x_1 = 0$; $y_1 = 5$ м) в точку 2 с координатами ($x_2 = -3$ м; $y_2 = 1$ м). Найти вектор перемещения частицы $\vec{r}$ и его проекции на оси декартовой системы координат.

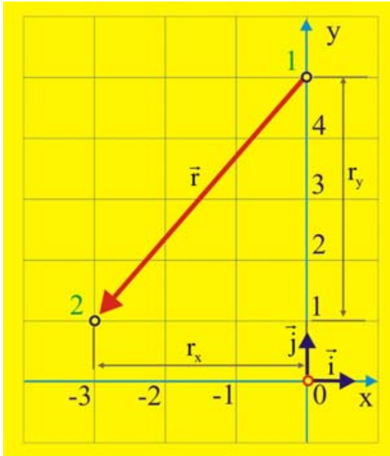

Рис. 1.181. Перемещение частицы

Решение

1. Как видно из рис. 1.181 проекции радиус-вектора на оси декартовой системы координат будут равны:

$$r_x = -3\text{м};\quad r_y = 4\text{м}.$$

2. Модуль вектора перемещения определится в виде гипотенузы прямоугольного треугольника, построенного на проекциях вектора перемещения

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{25} = 5\text{ м}.$$

3. Векторное уравнение перемещения запишется через единичные векторы, размерность которых равна единице длины $(\vec{i}; \vec{j})$, а их направление совпадает с направлением осей координат

$$\vec{r} = -3\vec{i} - 4\vec{j}.$$

1.182. Человек, двигаясь прямо на север, прошел путь $s_1 = 10$ км за время $t_1 = 2{,}5$ часа, затем он повернул на восток и прошёл ещё $s_2 = 5$ км за $t_2 = 1$ час. После чего, он проследовал точно на юго-запад со скоростью $v = 5$ км/час и шёл в таком темпе $t_3 = 0{,}5$ часа. Чему равна величина средней путевой скорости и модуль средней скорости.

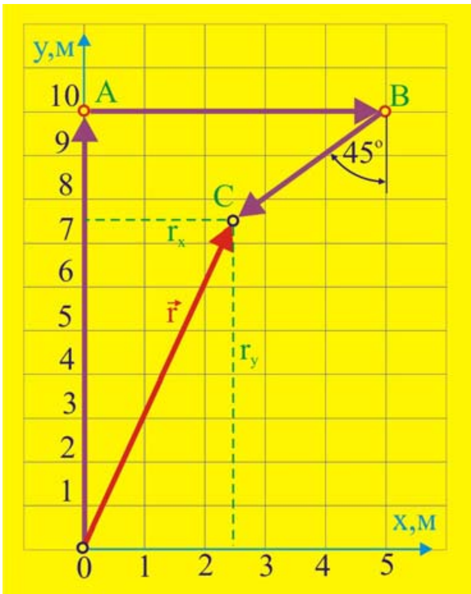

Рис. 1.182. Перемещение путника

Решение

1. Пройденное пешеходом расстояние

$$L = s_1 + s_2 + vt_3 = 17{,}5\text{км}.$$

2. Время нахождения на маршруте

$$\tau = t_1 + t_2 + t_3 = 4\text{часа}.$$

3. Средняя путевая скорость

$$v_L = \frac{L}{\tau} = \frac{s_1 + s_2 + vt_3}{t_1 + t_2 + t_3} \cong 4{,}4\frac{\text{км}}{\text{час}}$$

4. Определим проекции вектора перемещения на оси координат (рис. 1.182)

$$r_x = s_2 - vt_3 \sin 45^\circ = 5 - 2{,}5\cdot 0{,}707 = 3{,}23\text{ км},$$

$$r_y = s_1 - vt_3 \sin 45^\circ = 10 - 1{,}768 = 8{,}23\text{ км}.$$

5. Модуль вектора перемещения

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \cong 8{,}4 \quad \text{км}.$$

6. Средняя скорость путешественника

$$< v >= \frac{|\vec{r}|}{\tau} = 2{,}1\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

1.183. Частица совершает два одинаковых по модулю последовательных перемещения (рис. 1.183) со скоростью, соответственно v_1 = 20 м/с и v_2 = 40 м/с при α = 60° и β = 120°. Найти модуль путевой и средней скорости частицы.

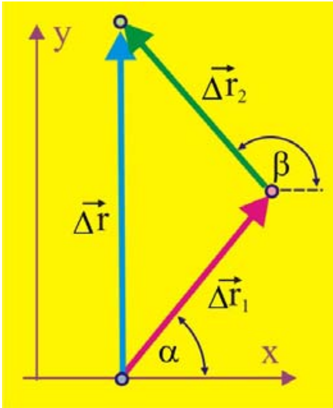

Рис. 1.183. Перемещения частицы

Решение

1. Определим модуль путевой скорости с учётом того обстоятельства, что частица проходит первую половину пути с одной скоростью, а вторую половину – с другой, причём:

$$t = \frac{|\Delta\vec{r}|}{<v>} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{|\Delta\vec{r}|}{2v_1} + \frac{|\Delta\vec{r}|}{2v_2};$$

$$\frac{1}{<v_s>} = \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2}; \quad \Rightarrow \quad <v_s> = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = \frac{2\cdot 20\cdot 40}{60} = 26{,}7\,\frac{м}{с}.$$

2. Определим модуль средней скорости с учётом того, что модули перемещений одинаковы, но составляют разные углы с вертикальной осью $\Delta r_1 = \Delta r_2 = r$

$$|\Delta\vec{r}| = \Delta r_1 \sin\alpha + \Delta r_2 \sin\beta = r(\sin\alpha + \sin\beta) = r\sqrt{3}$$

$$<v> - \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3}v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

1.184. Первую половину времени частица движется со скоростью v_1 = 20 м/с под углом α_1 = 60° к горизонтальной оси, а вторую половину – пол углом α_2 = 120° к горизонтальной оси со скоростью v_2 = 40 м/с (рис. 1.183). Найти модуль средней скорости и среднюю величину путевой скорости.

Решение

1. Средняя путевая скорость определится уравнением

$$v_s = \frac{v_1+v_2}{2} = 30\,\frac{м}{с}.$$

2. Модуль средней скорости определится как диагональ параллелограмма построенного на векторах скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$

$$<v> = \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos(\vec{v}_1;\vec{v}_2)}}{2} = \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos 60^\circ}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_1v_2}}{2} \cong 26{,}5\,\frac{м}{с}.$$

1.185. По прямому шоссе со скоростью v_1 = 16 м/с движется автобус. Человек, находящийся на расстоянии a = 60 м от шоссе и на b = 400 м от автобуса может бежать со скоростью v_2 = 4 м/с. В каком направлении человек должен пойти на перехват, чтобы выйти к точке шоссе одновременно с автобусом или опередить оный.

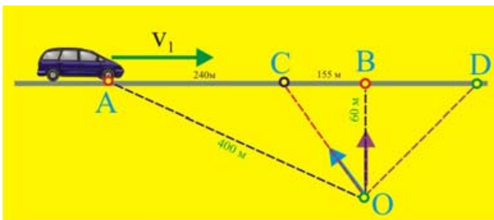

Рис. 1.185. Автобус и пешеход

Решение

1. Время, в течение которого по прямой пешеход достигнет шоссе

$$\tau = \frac{a}{v_2} = 15\ \text{с}.$$

2. За это время автобус пройдёт расстояние

$$x_1 = AC = v_1\tau = 240\ \text{м}.$$

3. Определим расстояние AB = *l*

$$\ell = \sqrt{b^2 - a^2} = 395\ \text{м},$$

таким образом, если человек побежит по нормали к дороге (OB) то он прибудет раньше автобуса в точку C

$$\Delta t = \frac{\ell - x_1}{v_1} \cong 9{,}7\ \text{с}.$$

4. Чтобы одновременно прибыть с автобусом в точку C человек должен бежать под некоторым углом к нормальному направлению

$$t_1 = t_2; \quad \frac{a}{v_2} = \frac{b\sin\alpha}{v_1}; \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{av_1}{bv_2};$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{60\cdot 16}{400\cdot 4}\right) \cong 36{,}7^\circ$$

1.186. Из начала координат одновременно начинают двигаться две частицы. Первая движется вдоль оси X со скоростью v_1 = 4 м/с, а вторая – вдоль оси Y со скоростью v_2 = 7 м/с. С какой скоростью частицы удаляются друг от друга?

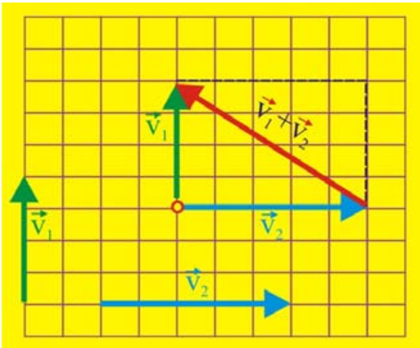

Рис. 1.186. Удаление частиц

Решение

1. Скорость удаления частиц друг от друга будет равна геометрической сумме векторов их скоростей, которая определяется в виде диагонали параллелограмма, построенного на соответствующих векторах

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\vec{v}_1;\vec{v}_2)},$$

так как угол между векторами прямой, то $\cos(\vec{v}_1;\vec{v}_2) = 0$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{16 + 49} \cong 8\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.187. Две частицы перемещаются в одной плоскости со скоростями v_1 = 4 м/с и v_2 = 7 м/с, при этом угол между направлениями движения частиц составляет α = 60°. С какой скоростью v первая частица удаляется от второй? Какой угол составляет скорость v с направлением движения второй частицы?

Решение

1. Скорость удаления частиц

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 60^\circ} \cong 6\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

2. Угол между векторами $(\vec{v};\vec{v}_2)$ определится как

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{v_1}{v}\sin\alpha\right) \cong 145^\circ$$

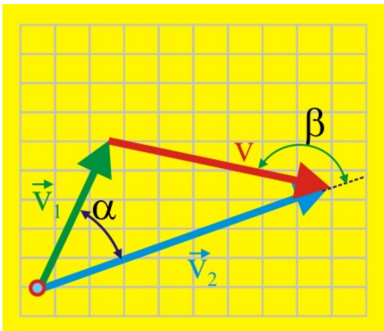

Рис. 1.187. Скорости частиц

1.188. Две частицы движутся вдоль осей плоской декартовой системы координат (рис. 1.188). В начальный момент времени ($t_0 = 0$) частицы находились на расстояниях l_1 = 10 см и l_2 = 5 см от начала системы отсчёта. Первая точка движется со скоростью v_1 = 2 см/с, а вторая – с v_2 = 4 см/с. Возможна ли встреча точек?

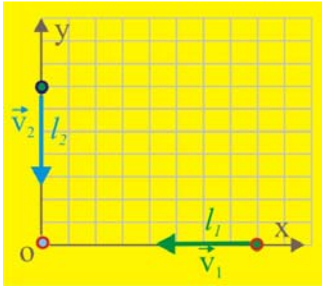

Рис. 1.188. Движение частиц

Решение

1. Первая частица достигнет начала системы отсчёта за время t_1

$$t_1 = \frac{\ell_1}{v_1} = 5\,с,$$

в то время как вторая частица той же точки достигнет за время t_2

$$t_2 = \frac{\ell_2}{v_2} = 1{,}25\,с.$$

2. В момент прохождения второй частицей точки о первая частица будет находиться от неё на расстоянии

$$\ell_3 = v_1(t_1 - t_2) = 7{,}5\,см.$$

1.189. Стержень, образующий угол $\alpha = 30^0$ с положительным направлением горизонтальной оси движется с постоянной скоростью v. С какой скоростью движется точка пересечения стержня с вертикальной осью?

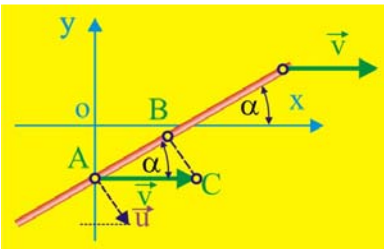

Рис. 1.189. Движение стержня

Решение

1. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, вектор скорости $\vec{v}$ в котором является гипотенузой, а катет BC будет численно равен модулю искомой скорости, но

$$\frac{BC}{AC} = tg\alpha; \quad \frac{u}{v} = tg\alpha; \quad u = vtg\alpha = \frac{v}{\sqrt{3}}.$$

1.190. Четыре черепахи находятся в углах квадрата со стороной ℓ. Черепахи одновременно начинают двигаться с одинаковой скоростью v, причём первая черепаха всё время держит курс на вторую, вторая – на третью, третья – на четвёртую, четвертая – на первую. Встретятся ли черепахи? Через какое время встреча возможна?

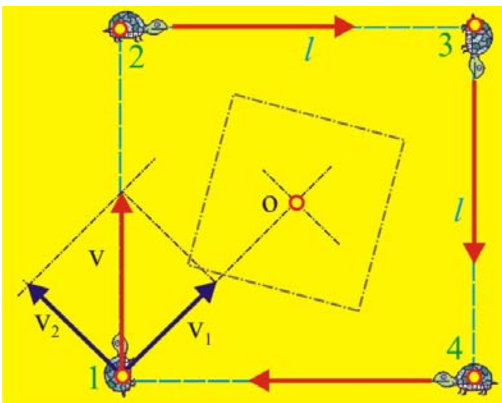

Рис. 1.190. Путешествие черепашек

Решение

1. Встреча черепах возможна. Векторы скоростей черепах будут менять своё направление, нацеливаясь, всё время на ползущую впереди особь, т.е. встреча черепах должна состояться в центре квадрата. Черепахи всё время находятся в вершинах квадрата, который поворачиваясь, уменьшается в размерах.

2. Разложим вектор скорости одной из черепах на две взаимно перпендикулярные составляющие $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2\}$. Очевидно, что со-

ставляющая скорости $\vec{v}_2$ будет направлена к центру квадрата. Расстояние от вершины до центра квадрата определится как половина гипотенузы прямоугольного треугольника

$$L = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Составляющая скорости $\vec{v}_1$ так же может быть найдена из прямоугольного треугольника с длиной гипотенузы, равной $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}_1| = \frac{|v|}{\sqrt{2}}.$$

4. Время достижения черепашкой центра квадрата

$$\tau = \frac{L}{|\vec{v}_1|} = \frac{\ell\sqrt{2}\sqrt{2}}{2|\vec{v}|} = \frac{\ell}{v}.$$

1.191. Ускоренно движущееся тело за Δt = 5 с увеличило свою скорость в n = 2 раза. Чему равен модуль среднего ускорения тела, если модуль вектора первоначальной скорости $|\vec{v}|$ = 10 м/с, а направление движения тела изменилось на $\alpha = 60^o$?

Решение

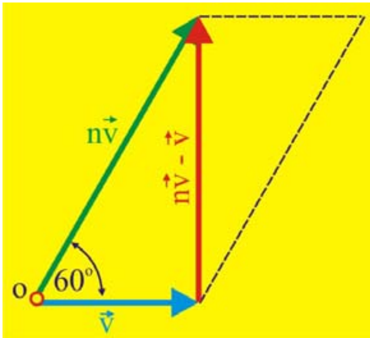

Рис. 1.191. Изменение скорости

1. Пусть начальная скорость равна v, а конечная скорость – nv, причём вектор конечной скорости составляет с вектором начальной скорости угол $\alpha = 60^o$. Изменение скорости (рис. 1.191) определится в виде диагонали параллелограмма, построенного векторах скоростей

$$\Delta v = n\vec{v} - \vec{v} = \sqrt{v^2 + n^2v^2 - 2v \cdot nv \cdot \cos\alpha},$$

$$\Delta v = v\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos\alpha}.$$

2. Модуль вектора ускорения

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos\alpha} = \frac{10}{5}\sqrt{1 + 4 - 2\cdot 2\cdot 0{,}5} \cong 3{,}46\frac{м}{с^2}.$$

1.192. Через открытое окно в комнату влетел шмель. Расстояние от насекомого до потолка менялось со скоростью 1 м/с, расстояние до стены, противоположной окну, менялось со скоростью 2 м/с, до боковой стены – со скоростью 2 м/с. Через τ = 1 с полета жук попал в угол между потолком и боковой стеной комнаты. Определите скорость и ускорение полета жука и место в окне, через которое он влетел в комнату. Высота комнаты 2,5 м, ширина 4 м, длина 4 м.

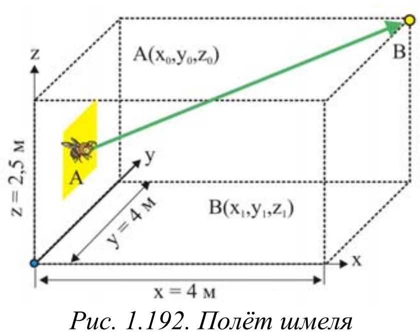

Рис. 1.192. Полёт шмеля

Решение

1. По условию задачи заданы, по сути, проекции скорости, а именно

$$v_z = 1 м/с,\ v_x = 2 м/с,\ v_y = 2 м/с,$$

что позволяет определить модуль скорости шмеля

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 3 м/с.$$

2. Координаты шмеля в конечном его положении, точка B на рис. 1.192

$$x_1 = 4\,м,\ y_1 = 4\,м, z_1 = 2{,}5\,м.$$

3. Координаты начального положения жука при пролёте им плоскости окна определятся как

$$x_0 = x_1 - v_x\tau = 4 - 2\cdot 1 = 2\,м,$$

$$y_0 = y_1 - v_y\tau = 4 - 2\cdot 1 = 2м,$$

$$z_0 = z_1 - v_z\tau = 2{,}5 - 1 = 1{,}5м.$$

4. Ускорение насекомого

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|}{\tau} = 3\frac{м}{с^2}.$$

1.193. Космический аппарат движется в открытом космосе со скоростью v. Требуется изменить направление движения на α = 90°, оставив модуль скорости неизменным. Определить минимальное время манёвра, если двигательная установка может сообщать в любом направлении максимальное ускорение a.

Решение

1. Модуль начальной и конечной скорости в начале и в конце манёвра остаётся постоянным, а направление вектора скорости изменяется на 90°, поэтому изменение скорости составит

$$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2}.$$

2. Изменение скорости, время и ускорения связаны уравнением

$$|\vec{v}| = at; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{|\Delta\vec{v}|}{a} = \frac{v\sqrt{2}}{a}.$$

1.194. Закон движения частицы задан векторным уравнением

$$\vec{r} = 2t\vec{i} + (2 + 3t^2)\vec{j}.$$

Найти: а) радиус-вектор и его модуль в моменты времени t_0 = 0, t_1 = 1 с, t_2 = 2 с; б) перемещение и модуль перемещения за 2 с движения $(\Delta\vec{r}, и\ \Delta r)$, за вторую секунду движения $(\Delta\vec{r}_2, \Delta r_2)$; в) уравнение траектории движения $y = f(x)$. Изобразить траекторию движения и показать $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \Delta\vec{r}, \Delta\vec{r}_2$.

Для момента времени t = 2 с определить: вектор скорости $\vec{v}$, модуль скорости $|\vec{v}|$, вектор ускорения $\vec{a}$ и модуль вектора ускорения $|\vec{a}|$, угол между векторами скорости и ускорения, нормальное ускорение a_n, тангенциальное ускорение a_τ, радиус кривизны траектории ρ. Изобразить эти величины для момента времени t = 2 с.

Решение

1. Определим по заданному уравнению проекции радиус-вектора на оси координат

$$\left.\begin{aligned} r_x &= 2t; \\ r_y &= 2 + 3t^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

2. Радиус-вектор в начальный момент времени, при t = 0

$$\vec{r}_0 = 2\vec{j}; \quad |\vec{r}_0| = 2\,м, \tag{2}$$

причём, направление радиус вектора $\vec{r}_0$ совпадает с положительным направлением вертикальной оси Y.

3. Радиус-вектор частицы для момента времени t = 1 с

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j}, \tag{3}$$

модуль этого радиус-вектора определим, воспользовавшись системой уравнений (1)

$$\left|\vec{r}_1\right| = \sqrt{r^2_{x(1)} + r^2_{y(1)}} = \sqrt{4+25} = 5{,}38\ \text{м}. \qquad (4)$$

4. Радиус-вектор частицы $\vec{r}_2$ и его модуль для момента времени t = 2 с

$$\begin{gathered} \vec{r}_2 = 4\vec{i} + 14\vec{j}; \\ \left|\vec{r}_2\right| = \sqrt{r^2_{x(2)} + r^2_{y(2)}} = \sqrt{16+196} = 14{,}56\ \text{м}. \end{gathered} \qquad (5)$$

5. Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ и его модуль $\left|\Delta\vec{r}\right|$ за первые две секунды движения

$$\begin{gathered} \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 = 4\vec{i} + (14-2)\vec{j} = 4\vec{i} + 12\vec{j}, \\ \left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{16+144} \cong 12{,}6\ \text{м}. \end{gathered} \qquad (6)$$

6. Вектор перемещения $\Delta\vec{r}_2$ и его модуль $\left|\Delta\vec{r}_2\right|$ за вторую секунду движения

$$\begin{gathered} \Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\vec{i} + 9\vec{j}; \\ \left|\Delta\vec{r}_2\right| = \sqrt{4+81} \cong 9{,}2\ \text{м}. \end{gathered} \qquad (7)$$

7. Для определения вида траектории перепишем систему уравнений (1) в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t; \\ y &= 2 + 3t^2; \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

выразим из первого уравнения системы (8) время и подставим это значение во второе уравнение

$$t = \frac{x}{2}; \quad y = 2 + 3\frac{x^2}{4} = 2 + 0{,}75x^2, \qquad (9)$$

уравнение (9) соответствует положительной ветви параболы (рис. 1.194)

8. Вектор скорости определится путём дифференцирования заданного векторного уравнения движения по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} + 6t\vec{j}, \qquad (10)$$

для момента времени t = 2 с

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 12\vec{j}, \qquad (11)$$

модуль вектора скорости:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{4+144} \cong 12{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad (12)$$

9. Вектор ускорения $\vec{a}$ и его модуль $\left|\vec{a}\right|$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{j}; \quad \left|\vec{a}\right| = 6\frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \qquad (13)$$

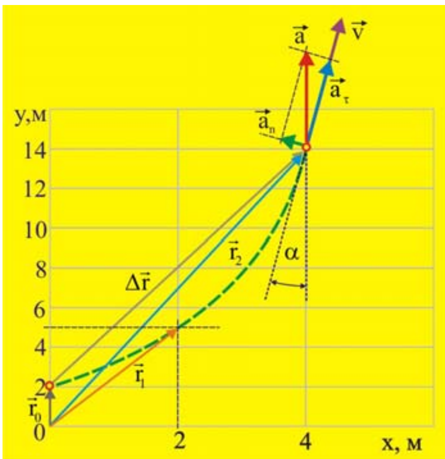

Рис. 1.194. Траектория и кинематические параметры движения

10. Угол между векторами скорости и ускорения

$$\alpha = \arccos\frac{a_x v_x + a_y v_y}{av} = \arccos\frac{0\cdot 2 + 6\cdot 12}{6\cdot 12{,}2} \cong 11^\circ. \qquad (14)$$

11. Тангенциальная a_τ и нормальная a_n составляющие ускорения

$$a_\tau = a\cos\alpha = 6\cdot\cos 11^\circ \cong 5{,}88\frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_n = a\sin\alpha = 6\cdot 0{,}19 = 1{,}14\frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \qquad (15)$$

12. Радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \approx \frac{149}{1{,}14} \approx 130\ \text{м}. \qquad (16)$$

1.195. Закон движения частицы задан векторным уравнением

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} - (t^2 - 1)\vec{j}.$$

Найти уравнение траектории частицы и законы изменения во времени скорости и ускорения.

Решение

1. Запишем уравнения движения частицы в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 2t; \\ y(t) &= 1 - t^2. \end{aligned}\right\}$$

2. Для того чтобы получить уравнение траектории $y = f(x)$ необходимо из уравнений движения исключить время, для чего выразим из первого уравнения системы время и подставим это значение во второе уравнение

$$t = \frac{x}{2}; \quad y = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Вид траектории показан на рис. 1.195.

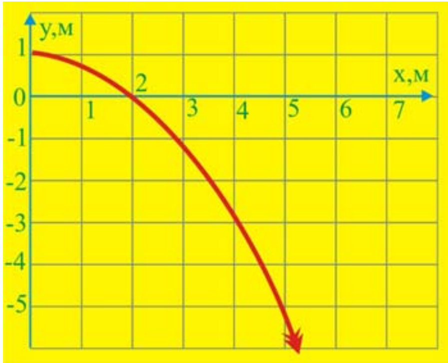

Рис. 1.195. Траектория частицы

2. Уравнение скорости получим путём дифференцирования заданного векторного уравнения по времени

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 2t\vec{j}.$$

3. Ускорение определится в виде производной скорости по времени

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j}.$$

1.196. Частица движется в плоскости в соответствие с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 t^2; \\ y(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 t^2, \end{aligned}\right\}$$

где: $B_1 = B_2 = 1$ м/с, $C_1 = -1$ м/с^2, $C_2 = 2$ м/с^2. Определить ускорение частицы и определить угол между векторами скорости и ускорения для времени t = 1 с.

Решение

1. Определим проекции скорости на оси координат

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = B_1 + 2C_1 t; \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = B_2 + 2C_2 t. \end{aligned}\right\}$$

2. Проекции ускорения на координатные оси

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 2C_1; \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = 2C_2. \end{aligned}\right\}$$

3. Векторное уравнение ускорения

$$\vec{a} = 2C_1\vec{i} + 2C_2\vec{j} = -2\vec{i} + 4\vec{j}.$$

4. Найдём значения модулей скорости и ускорения и их проекции на оси координат для t = 1 с

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + 25} = 5{,}1\frac{\text{м}}{\text{c}}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4 + 16} = 4{,}47\frac{\text{м}}{\text{c}^2}$$

$$v_x = 1 - 2 = -1\frac{м}{с};\quad v_y = 1 + 4 = 5\frac{м}{с};\quad a_x = -2\frac{м}{с^2};\quad a_y = 4\frac{м}{с^2}.$$

5. Угол между векторами скорости и ускорения

$$\alpha = \arccos\frac{a_x v_x + a_y v_y}{av} \cong \frac{-2 + 20}{4{,}47 \cdot 5{,}1} \cong 16^\circ.$$

1.197. Частица движется в плоскости, вдоль оси X движение происходит с постоянной скоростью v_x = 0,5 м/с. Вдоль оси Y уравнение траектории имеет вид

$$y = 0{,}2x^2 + 15x^3.$$

Найти зависимость скорости движения вдоль оси Y от времени, полагая, что в начальный момент времени частица находилась в начале системы отсчёта.

Решение

1. Представим заданную проекцию скорости v_x в виде производной по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0{,}5\frac{м}{с};\quad \Rightarrow\quad dx = 0{,}5dt.$$

2. Проинтегрируем полученное уравнение

$$\int dx = 0{,}5\int dt;\quad x = 0{,}5t + C,$$

где C – постоянная интегрирования. При подстановке в уравнение начальных условий t = 0, x = 0 видно, что C = 0

3. Подставим значение x в заданное уравнение траектории, т.е. определим зависимость координаты y от времени

$$y(t) = 0{,}2 \cdot 0{,}25t^2 + 15 \cdot 0{,}125t^2 = 0{,}05t^2 + 1{,}875t^3.$$

4. Продифиринцируем последнее уравнение по времени

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0{,}1t + 5{,}625t^2.$$

1.198. Воздушный шар поднимается с поверхности земли с постоянной скоростью v_0. Под воздействием ветра шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = \alpha y$, где α – постоянная величина, y – высота подъёма шара. Найти зависимость от величины подъёма шара y величины сноса x и модуля скорости v.

Решение

1. Представим проекцию скорости v_x в виде производной по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha y;\quad dx = \alpha y dt.$$

2. Проинтегрируем полученное уравнение

$$\int dx = \alpha y\int dt;\quad x = \alpha y t + C,$$

где C – постоянная интегрирования, C = 0, т.к. при t = 0, x = 0, y = 0.

3. Ввиду постоянства вертикальной составляющей скорости

$$y = v_0 t;\quad \Rightarrow\quad t = \frac{y}{v_0}.$$

4. Подставим значение времени в уравнение x =f(t) и получим величину сноса на высоте y

$$x = \frac{\alpha y^2}{v_0}.$$

5. На поверхности земли $v_x = 0$, а на высоте y – $v_x = \alpha y$, среднее значение горизонтальной скорости будет составлять, $v_x = 0{,}5\alpha y$, т.е.

$$x(y)=\frac{\alpha y^2}{2v_0}.$$

1.199. Первая частица движется по траектории $y=5x^2$. Вторая частица перемещается в соответствии с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=2t; \\ y&=8t. \end{aligned}\right\}$$

Возможна ли встреча этих точек? Если встреча состоится, то в каких координатах, и в какое время произойдёт это событие?

Решение

1. Приравняем уравнения перемещения по вертикальной оси частиц

$$5x^2=8t; \quad \Rightarrow \quad t=\frac{5}{8}x^2.$$

2. Подставим полученное уравнение времени во второе уравнение системы, описывающей движение второй частицы

$$y=8t=8\frac{5}{8}x^2=5x^2,$$

т.е. встреча частиц произойдет.

3. Определим координату встречи, для чего из первого уравнения системы выразим время и подставим во второе уравнение, получим уравнение траектории второй частицы

$$t=\frac{x}{2}; \quad y=8\frac{x}{2}; \quad y=4x.$$

4. Приравняем уравнение траекторий, т.к. в месте встречи они должны пересекаться в одной точке

$$4x=5x^2; \quad \Rightarrow \quad x_B=0{,}8\,м.$$

5. Определим время встречи

$$0{,}8=2t_B; \quad \Rightarrow \quad t_B=\frac{0{,}8}{2}=0{,}4\,c.$$

1.200. Радиус-вектор некой частицы изменяется во времени по закону:

$$\vec{r}=(R\sin\omega t)\vec{i}+(R\cos\omega t)\vec{j},$$

где R и ω – положительные постоянные величины. Найти уравнение траектории частицы. Каковы координаты частицы в момент времени t = 0? В каком направлении движется частица? Чему равен вектор и модуль скорости частицы в любой момент времени?

Решение

1. Перепишем заданное уравнение в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} r_x&=R\sin\omega t; \\ r_y&=R\cos\omega t. \end{aligned}\right\}$$

2. Чтобы установить вид траектории необходимо из уравнений движения исключить время, для чего целесообразно возвести эти уравнения в квадрат и сложить

$$r_x^2=R^2\sin^2\omega t; \quad r_y^2=R^2\cos^2\omega t,$$

$$r_x^2+r_y^2=R^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right),$$

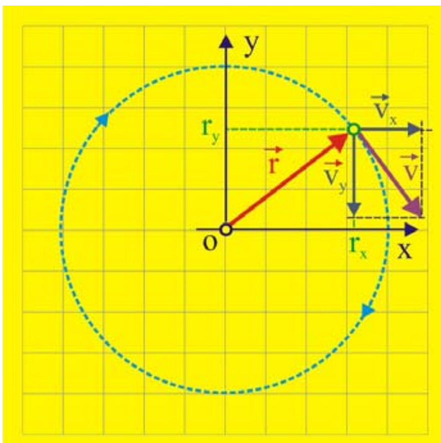

Рис. 1.200. Траектория

т.к. $\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) = 1$, то уравнение траектории примет вид:

$$r_x^2 + r_y^2 = R^2,$$

другими словами, частица движется по круговой траектории постоянного радиуса R

3. Проекции скорости частицы определим путём дифференцирования уравнений движения

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dr_x}{dt} = \omega R\cos\omega t; \\ v_y &= \frac{dr_y}{dt} = -\omega R\sin\omega t. \end{aligned}\right\}$$

4. Судя по знакам проекции скорости (рис. 1.200), частица вращается вокруг неподвижной оси по направлению движения часовой стрелки.

5. Запишем векторное уравнение скорости

$$\vec{v} = (\omega R\cos\omega t)\vec{i} - (\omega R\sin\omega t)\vec{j}.$$

6. Модуль скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 R^2\cos^2\omega t + \omega^2 R^2\sin^2\omega t} = \omega R.$$

7. Для определения положения частицы в начальный момент времени необходимо подставить в уравнения движения t = 0

$$\left.\begin{aligned} r_x &= R\sin 0; \\ r_y &= R\cos 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r_{x(0)} &= 0; \\ r_{y(0)} &= R. \end{aligned}\right\}$$

1.201. Координаты частицы изменяются в соответствии с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\omega t; \\ y &= B\sin\omega t, \end{aligned}\right\}$$

где A и B – постоянные величины. Найти векторы скорости и ускорения частицы. Определить вид траектории. Найти момент времени τ, когда скорость частицы будет перпендикулярна её радиус-вектору.

Решение

1. Проекции и вектор скорости частицы

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = A\omega\sin\omega t; \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -B\omega\cos\omega t. \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{v} = (A\omega\sin\omega t)\vec{i} + (B\omega\cos\omega t)\vec{j}.$$

2. Проекции и вектор ускорения

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t; \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -B\omega^2\sin\omega t. \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{a} = -\left(A\omega^2\cos\omega t\right)\vec{i} - \left(B\omega^2\sin\omega t\right)\vec{j}$$

3. Вид траектории определим исключив из заданных уравнений движения время, для чего возведём уравнения в квадрат и сложим

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= A^2\cos^2\omega t; \\ y^2 &= B^2\sin^2\omega t, \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

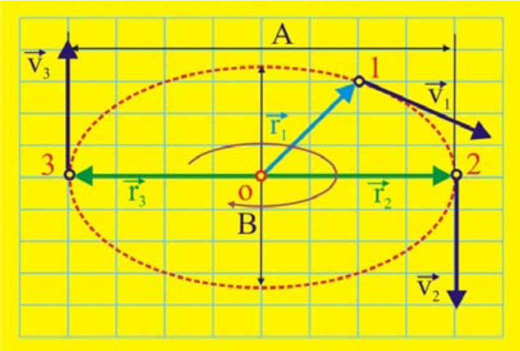

Рис. 1.201. Эллиптическая траектория

т.е. частица движется по эллиптической траектории (рис. 1.201) по направлению движения часовой стрелки.

4. Вектор скорости будет перпендикулярен радиус-вектору частицы при каждом обороте в точках 2 и 3. Величина ω в данном случае является циклической частотой, следовательно, два раза за период вращения T скорость будет перпендикулярна радиус-вектору, т.е.

$$\tau = \frac{\pi n}{2\omega}; \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

1.202. Две частицы движутся в соответствии с уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2\cos 2\pi t; \\ y_1 &= 2\sin 2\pi t; \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{r}_2 = 4t\vec{i} + \left(1 - 4t^2\right)\vec{j}.$$

По каким траекториям движутся частицы? Изобразить траектории.

Решение

1. Определим вид траектории первой частицы, для чего исключим из заданных уравнений движения время, которое в данном случае является параметром. Проще всего это сделать, как и в предыдущих задачах, возведя уравнения движения в квадрат и сложив их

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= 4\cos^2 2\pi t; \\ y_1^2 &= 4\sin^2 2\pi t; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 4\left(\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t\right);$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4,$$

первая частица движется по круговой траектории с радиусом R = 2 м, центр окружности совпадает с началом системы отсчёта (рис. 1.202).

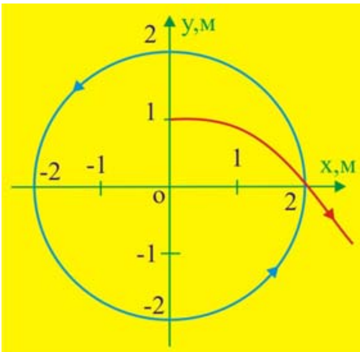

Рис. 1.202. Траектории частиц

2. направление движения первой частицы определим по знакам проекций вектора скорости

$$\left.\begin{aligned} v_{x(1)} &= \frac{dx_1}{dt} = -4\pi\sin 2\pi t; \\ v_{y(1)} &= \frac{dy_1}{dt} = 4\pi\cos 2\pi t. \end{aligned}\right\}$$

Первая частица вращается против направления движения часовой стрелки, т.к. проекция скорости на горизонтальную ось имеет отрицательный знак.

3. Траектория движения второй частицы

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 4t; \\ y_2 &= 1 - 4t^2; \end{aligned}\right\} \quad t = \frac{x_2}{4}; \quad y_2 = 1 - 4\frac{x_2^2}{16} = 1 - \frac{x_2^2}{4},$$

вторая частица движется по параболической траектории, причём вершина параболы пересекает вертикальную координатную ось в точке 1 м. Точку пересечения параболой оси X найдём, положив y = 0

$$0 = 1 - \frac{x_2^2}{4}; \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2.$$

Движение материальной точки по окружности

1.203. На сколько километров орбита первого спутника Земли короче длины орбиты третьего спутника, если средние радиусы их орбит отличаются на ΔR = 410 км?

Решение

1. Длина окружности определяется известным уравнением

$$\ell = 2\pi R\,,$$

следовательно, разность длин орбит для спутников, находящихся на орбитах разного радиуса определится уравнением

$$\Delta\ell = 2\pi\Delta R = 6{,}28\cdot 410 \cong 2575\ \text{км}\,.$$

1.204. Определить линейную скорость Луны в её орбитальном вращении вокруг Земли, если период обращения (синодический месяц) равен T = 27,3 суток. Расстояние между центрами Земли и Луны принять равным $R \approx 3{,}85\cdot 10^5$ км.

Решение

1. Определим угловую скорость вращения Луны

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

2. Найдём орбитальную линейную скорость движения естественного спутника

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R \cong \frac{6{,}28\cdot 3{,}85\cdot 10^5}{27{,}3\cdot 24\cdot 3600} \cong 1\frac{\text{км}}{\text{с}}\,.$$

1.205. Космический корабль «Восток – 5» совершал N = 64 оборота вокруг Земли за время t = 95 часов. Определить среднюю линейную скорость орбитального полёта корабля v, приняв орбиту круговой, отстоящей от поверхности Земли на расстоянии h = 230 км.

Решение

1. Период обращения корабля вокруг Земли

$$T = \frac{t}{N}\,.$$

2. Угловая скорость корабля

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

3. Линейная скорость орбитального движения

$$v = \omega(R_З + h) = \frac{2\pi}{T}(R_З + h) = \frac{2\pi N}{t}(R_З + h) = \frac{6{,}28\cdot 64}{95\cdot 3600}(6400 + 230) = 7{,}8\frac{\text{км}}{\text{с}}\,.$$

1.206. Частица, движущаяся равномерно по круговой траектории делает полный оборот за T = 5 с. Определить угловую скорость частицы и угол её поворота $\Delta\varphi$ за время Δt = 2 с.

Решение

1. Угловая скорость движения частицы

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{5} \cong 1,26 \text{ с}.$$

2. Угол поворота частицы

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t = 1,26 \cdot 2 = 2,52 \text{ рад} \cong \frac{2,52 \cdot 180}{3,14} \cong 144^{\circ}.$$

1.207. Допустимая линейная скорость точек поверхности шлифовального круга не должна превышать v = 100 м/с. Найти предельную частоту вращения круга n , если его диаметр составляет d = 0,4 м. Определить величину нормального ускорения a_n точек рабочей поверхности.

Решение

1. Определим для предельной скорости угловую скорость шлифовального круга

$$v = \omega r = \omega\frac{d}{2}; \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2v}{d}.$$

2. Найдём предельную частоту вращения

$$\omega = 2\pi n; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{v}{\pi d} = \frac{100}{3,14 \cdot 0,4} \cong 80\frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

3. Нормальное ускорение периферийных точек круга

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2v^2}{d} = \frac{2 \cdot 10^4}{0,4} = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

1.208. Большой шкив ремённой передачи имеет радиус R_1 = 0,32 м и вращается с частотой n_1 = 2 об/с. Малый шкив имеет радиус R_2 = 0,24 м. Определить угловую скорость, частоту вращения n_2 малого шкива и линейную скорость ремня.

Решение

1. Определим линейную скорость ремня, считая его нерастяжимым и движущимся без проскальзывания

$$v = \omega_1 R_1 = 2\pi n_1 R_1 = 6,28 \cdot 2 \cdot 0,32 = 4,02\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Поскольку линейная скорость всех точек ремня одинакова, то угловая скорость малого шкива определится как:

$$v = \omega_2 R_2; \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{4,02}{0,24} = 16,7\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

3. Частота вращения малого шкива

$$\omega_2 = 2\pi n_2; \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{16,7}{6,28} = 2,67\frac{\text{об}}{\text{с}} = 160\frac{\text{об}}{\text{мин}}.$$

1.209. Диск вращается относительно неподвижной оси, проходящей перпендикулярно плоскости через его центр. Линейная скорость периферийных точек диска равна v_1 = 3 м/с. У точек, расположенных на расстоянии L = 0,1 м ближе к оси вращения линейная скорость равна v_2 = 2 м/с. Какова частота n вращения диска?

Решение

1. Запишем уравнения для определения линейных скоростей заданных точек диска с учётом одинаковости угловой скорости всех точек

$$v_1 = \omega R_1; \quad v_2 = \omega(R_1 - L).$$

2. Решая совместно эти уравнения, найдём внешний радиус диска

$$R_1 = \frac{v_1 L}{v_1 - v_2} = \frac{3 \cdot 0{,}1}{3-2} = 0{,}3 \text{ м}.$$

3. Найдём угловую скорость диска и частоту его вращения

$$v_1 = \omega R_1; \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_1}{R_1} = 10\frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$\omega = 2\pi n; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{6{,}28} = 1{,}6\frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

1.210. Найти радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость точек обода колеса в k = 2,5 раза больше линейной скорости точек, лежащих на расстоянии d = 0,05 м ближе к оси.

Решение

1. Запишем уравнения линейных скоростей заданных точек диска

$$\left.\begin{aligned} kv &= \omega R_1; \\ v &= \omega(R_1 - d); \end{aligned}\right\}$$

2. Решая совместно уравнения, получим

$$R_1 = \frac{kd}{k-1} = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}05}{2{,}5-1} \cong 8{,}33 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

1.211. Два диска, закреплённые на одной оси и отстоящими друг от друга на расстоянии d = 0,5 м вращаются с частотой n = 1600 об/мин. Пуля, летящая параллельно оси вращения, пробирает оба диска, при этом во втором диске отверстие смещено относительно отверстия в первом диске на угол $\Delta\varphi = 12^{\circ}$. Определить скорость пули.

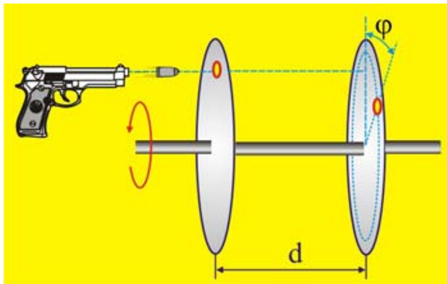

Рис. 1.211. Определение скорости пули

Решение

1. Определим угловую скорость вращения дисков

$$\omega = 2\pi n = 6{,}28 \cdot \frac{1600}{60} = 167{,}5\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

2. Найдём время пролёта пулей расстояния между вращающимися дисками d

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t};$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{3{,}14 \cdot 12}{180 \cdot 167{,}5} \cong 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{с}.$$

3. Определим скорость пули

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi n d}{\Delta\varphi} = \frac{0{,}5}{1{,}25 \cdot 10^{-3}} = 400\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.212. Сравните линейные скорости и нормальные ускорения точек земной поверхности, расположенных на экваторе нашей планеты и в Петропавловске – Камчатском, на широте $\varphi = 53{,}5^0$. Радиус Земли принять равным 6400 км.

Решение

1. Расстояние г. Петропавловска – Камчатского от оси вращения Земли

$$r = R_З \cos\varphi \cong 3{,}8\ 10^6 \text{ м/с}.$$

Рис. 1.212. Вращение Земли

2. Угловая скорость вращения Земли, с учётом того, что период вращения равен T = 24 час. = 8,64 10^4 с

$$\omega = 2\pi/T \cong 7{,}2 10^{-5}\ \text{рад/с}.$$

3. Отношение линейных скоростей точек земной поверхности на экваторе и в Петропавловске

$$\frac{v_Э}{v_П} = \frac{\omega R\cos\varphi}{\omega R} = \frac{276\,\text{м/с}}{461\,\text{м/с}} \cong 1{,}7.$$

4. Отношение нормальных ускорений

$$\frac{a_{nЭ}}{a_{nП}} = \frac{\omega^2 R}{\omega^2 R\cos\varphi} \cong 1{,}7.$$

1.213. Звено боевых реактивных самолётов (рис. 1.213) выполняет разворот в горизонтальной плоскости, двигаясь по отрезкам круговых траекторий, на расстоянии L = 60 м друг от друга. Ближайший к центру виража самолёт находится от центра вращения на расстоянии R = 600 м. Средний самолёт движется с линейной скоростью v_2 = 100 м/с. Определить ускорение каждого самолёта.

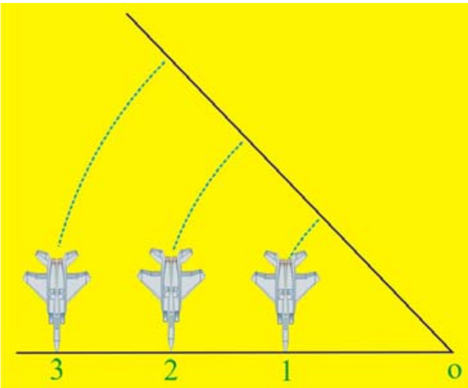

Рис. 1.213. Разворот самолётов

Решение

1. Расстояние от центра вращения до второго самолёта

$$R_2 = R_1 + L = 660\ \text{м}.$$

2. Т.к. движение самолётов происходит по отрезкам концентрических окружностей с центрами на оси вращения, то в соответствии с теоремой Эйлера угловая скорость всех трёх самолётов будет одинаковой

$$\omega = \frac{v_2}{R_2} = \frac{100}{660} = 0{,}151\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

3. Определим линейные скорости первого и третьего самолётов

$$v_1 = \omega R = 90\,\text{м/с};$$

$$v_3 = \omega(R + 2L) = 108{,}7\ \text{м/с}.$$

4. Нормальные ускорения самолётов

$$a_{n(1)} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{8100}{600} = 13{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{n(2)} = \frac{v_2^2}{R+L} = \frac{10^4}{660} = 15{,}15\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{n(3)} = \frac{v_3^2}{R+2L} = \frac{1{,}18\cdot 10^4}{720} = 16{,}4\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

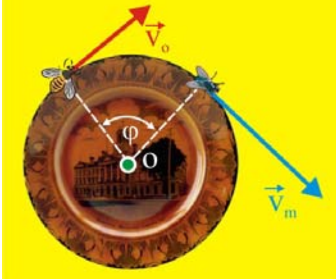

Рис. 1.214. Насекомые

1.214. Оса и муха движутся по ободу круглой тарелки с постоянными угловыми скоростями ω_1 = 0,2 рад/с и ω_2 = 0,3 рад/с. В начальный момент времени угол между их радиусами φ = π/3 радиан. В какой момент времени насекомые встретятся?

Решение

1. Определим угловое расстояние, разделяющее насекомых

$$\Delta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi .$$

2. Запишем уравнения движения насекомых в угловых координатах

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \omega_1 t + \Delta\varphi;\\ \varphi_2(t) &= \omega_2 t.\end{aligned}\right\}$$

3. В момент встречи угловые координаты насекомых, осы и мухи должны совпасть, т.е. $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$

$$\omega_1 t_B + \frac{5}{3}\pi = \omega_2 t_B; \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{5\pi}{3(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{5 \cdot 3{,}14}{3 \cdot 0{,}1} = 52{,}3\,с .$$

1.215. Собака гонится за зайчиком по окружности радиусом R =5 м с постоянной линейной скоростью v_1 = 11,1 м/с (рис. 1.215). Когда расстояние между ними по дуге стало равным 1/8 длины окружности, зайчик стал убегать со скоростью v_2 = 13,9 м/с. Через какое время зайчик удалится от собаки на расстояние, равное половине длины окружности?

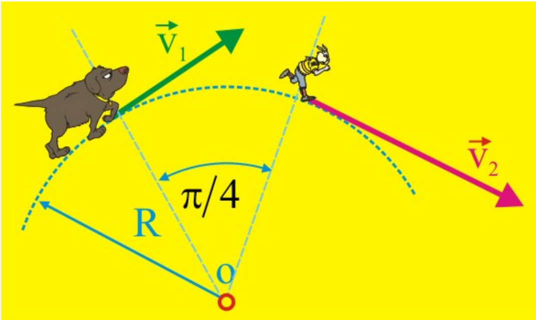

Рис. 1.215. Погоня собаки за зайцем

Решение

1. Представим заданные угловые расстояния в линейном масштабе

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi ,$$

т.е. необходимо определить время, за которое животные удаляться друг от друга на угол $\Delta\varphi$, что в линейном масштабе составит:

$$\Delta\ell = \frac{3}{4}\pi R .$$

2. Скорость относительного перемещения собачки и зайчика

$$v_r = v_2 - v_1 .$$

3. Искомое время

$$\Delta t = \frac{\Delta\ell}{v_r} = \frac{3}{4}\frac{\pi R}{v_2 - v_1} = 4{,}2\ с .$$

1.216. Две птицы летают но одинаковой круговой траектории встречно (рис. 1.216), первая птица, движущаяся по направлению вращения часовой стрелки, делает один круг за время T_1 = 5 с, вторая – за T_2 = 2 с. Определить промежуток времени между двумя последовательными встречами пернатых.

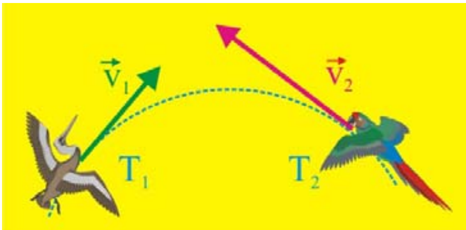

Рис. 1.216. Встречный полёт птиц

Решение

1. Обозначим длину окружности по которой движутся птички через s, тогда для средней скорости относительного движения птиц можно записать уравнение

$$\langle v_r \rangle = \frac{s}{\tau} = \frac{s}{T_1} + \frac{s}{T_2}; \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} ,$$

из которого определяется искомый промежуток времени между встречами птиц

$$\tau = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = \frac{10}{7} = 1{,}43\ с .$$

Рис. 1.217. Часовая и секундная стрелки

1.217. Сколько раз в сутки N встречаются часовая и секундная стрелки часов (рис. 1.217)?

Решение

1. Запишем величины периодов обращения секундной и часовой стрелок

$T_с = 60$ с; $T_ч = 2\cdot 24\cdot 3600 = 1{,}728\cdot 10^5$ с

2. Количество оборотов, которые делают стрелки за сутки $\tau = 8{,}64\cdot 10^4$ с

$$n_с = \frac{\tau}{T_с};\quad n_ч = \frac{\tau}{T_ч}.$$

3. Количество встреч стрелок

$$N = n_с - n_ч = \frac{\tau}{T_с} - \frac{\tau}{T_ч} = \frac{\tau(T_ч - T_с)}{T_ч T_с} = \frac{8{,}64\cdot 10^4(1{,}728\cdot 10^5 - 60)}{1{,}728\cdot 10^5\cdot 60} \cong 1439.$$

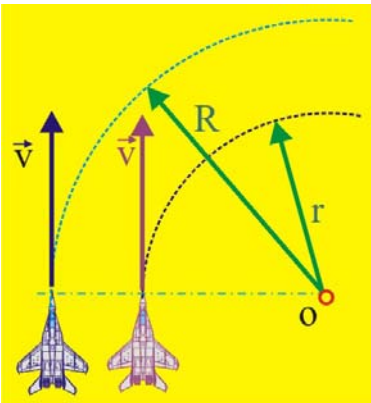

Рис. 1.218. Круговой маневр

1.218. Два сверхзвуковых перехватчика одновременно в одной плоскости начали боевой разворот по круговым траекториям с одинаковой скоростью v = 500 м/с; один с радиусом r $=5\cdot 10^3$ м, второй – с R = $1\cdot 10^4$ м. Определить угол между направлениями векторов ускорений самолётов через время t = 100 с после начала кругового движения, если в начальный момент времени самолёты находились на одном радиусе.

Решение

1. Движение самолётов с одинаковыми линейными скоростями вокруг одной неподвижной оси вращения по разным радиусам предполагает, в соответствие с теоремой Леонарда Эйлера $(\vec{v} = [\vec{\omega}\times\vec{r}])$ у них разные угловые скорости.

2. Вектор ускорения будет определяться исключительно нормальной составляющей, потому что тангенциальная составляющая ускорения совпадает по направлению с направлением линейной скорости

$$a_n = \frac{v^2}{r_i},$$

которая направлена по радиус-вектору в сторону оси вращения. В этой связи угол между векторами ускорений самолётов будет равен разности их угловых координат $\Delta\varphi$. Угол φ стягивающий дугу длиной $\ell = vt$, равен отношению длины дуги к радиусу, при этом:

$$\varphi_1 = \frac{vt}{R};\quad \varphi_2 = \frac{vt}{r},$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{vt}{r} - \frac{vt}{R} = \frac{vt(R - r)}{rR} = \frac{500\cdot 100\cdot 5\cdot 10^3}{5\cdot 10^7} \cong 3\text{ рад}.$$

1.219. Собачка на поводке длиной L = 10 м бегает вокруг вертикально вбитого в землю шеста (рис. 1.219). Определить модуль перемещения за время в течение, которого пёсик совершает:

- один полный оборот;
- половину полного оборота;
- четверть полного оборота;

- при повороте на угол $\alpha = 60^o$.

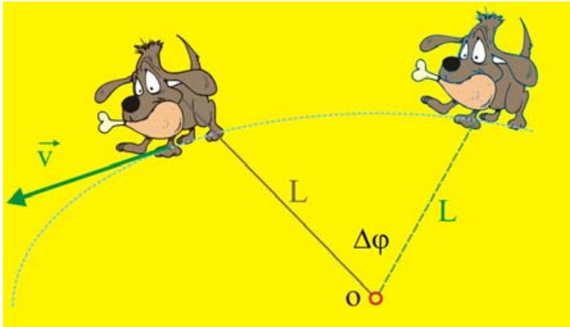

Рис. 1.219. Круговой забег пёсика

Решение

1. При совершении одного полного оборота начальная и коечная точка траектории собачки совпадают, поэтому модуль вектора перемещения будет нулевым

$$r_1 = 0 .$$

2. При прохождении половины длины окружности начальная и конечная точка будут удалены на величину удвоенной длины поводка

$$r_2 = 2L = 20\ \text{м} .$$

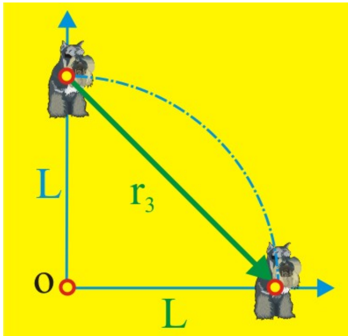

Рис. 1.219.1. Четверть длины

3. Если собака пробегает четверть полного оборота, то модуль перемещения численно будет равен гипотенузе прямоугольного треугольника, катеты которого одинаковы и равны L (рис. 1.219.1)

$$r_3 = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2} = 14{,}1\ \text{м}$$

4. При совершении движения, соответствующего угловому повороту $\alpha = 60^0$ модуль вектора перемещения определится как длина хорды, стягивающей эту дугу

$$r_4 = 2L \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 20 \cdot \sin 30^o = 10\ \text{м} .$$

1.220. За промежуток времени τ = 10 с некое тело по круговой траектории преодолело половину окружности радиусом R = 100 см. Определить среднюю путевую скорость $<v_s>$ и модуль средней скорости $|<\vec{v}>|$.

Решение

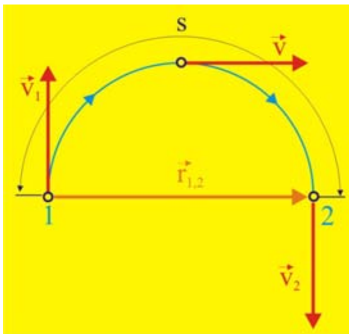

Рис. 1.220. Перемещение тела

1. За указанное время τ = 10 с тело, которое в данном случае представляется в виде материальной точки, стартуя, например, из точки 1 перемещается в точку 2, при этом происходит поворот на угол $\varphi = \pi$ и преодолевается линейное расстояние (проходится путь)

$$s = \pi R .$$

Путевая скорость в этом случае определится как:

$$< v_s > = \frac{s}{\tau} = \frac{\pi R}{\tau} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2}{10} = 31{,}4\frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

2. Модуль средней скорости определится в виде отношения модуля перемещения $|\vec{r}_{1,2}|$ = 2R к заданному промежутку времени

$$< \vec{v} > = \frac{2R}{\tau} = \frac{200}{10} = 20\frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

1.221. Колесо автомобиля радиусом R = 0,5 м катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с линейной скоростью v_C = 2 м/с. Найти скорости точек A, B, C, D, K, P. Определить геометрическое место точек, скорость которых в данный момент времени равна v = 2 м/с. Угол $\alpha = 60^o$.

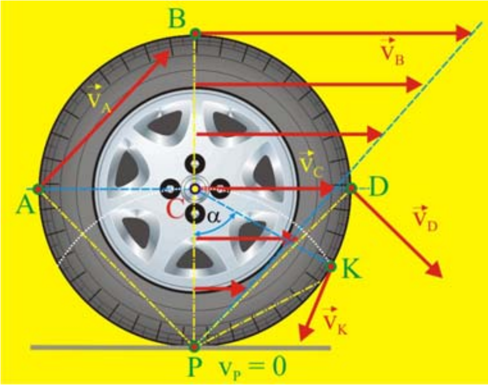

Рис. 1.221. Плоское движение колеса

Решение

1. Катящееся без проскальзывания колесо совершает, так называемое, плоское движение, которое в общем случае можно представить состоящим из двух более простых движений – поступательного движения и вращательного движения.

2. Точка P в данный момент времени является общей у движущегося колеса и неподвижной плоскости, другими словами, точка P в данный момент времени имеет нулевую скорость. Через эту точку, перпендикулярно плоскости чертежа проходит мгновенная ось вращения, вокруг которой в данное мгновение вращаются все, без исключения точки колеса. Скорости отдельных точек находятся по теореме Леонарда Эйлера $\vec{v} = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$, где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости, $\vec{r}$ – радиус-вектор данной точки вращающегося тела. Точка P называется мгновенным центром вращения, а проходящая через эту точку ось – называется мгновенной осью вращения. При движении колеса ось вращения будет перемещаться вправо со скоростью v_C.

3. Скорость любой точки колеса определяется в виде произведения угловой скорости колеса на кратчайшее расстояние до мгновенной оси вращения. Определим угловую скорость колеса

$$|\vec{v}| \equiv v = \omega R; \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R} = 4\frac{\text{рад}}{\text{c}}.$$

4. Определим кратчайшие расстояния от заданных точек колеса до мгновенной оси вращения (до точки P, в данный момент времени)

$$PA = PD = R\sqrt{2}; \quad PB = 2R; \quad PK = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = R.$$

5. Скорости заданных точек

$$v_A = \omega \cdot PA = \frac{v_C}{R} R\sqrt{2} = 1{,}41 v_C = 2{,}82\frac{\text{м}}{\text{c}},$$

$$v_B = \omega \cdot PB = \omega \cdot 2R = 2v_C = 4\frac{\text{м}}{\text{c}},$$

$$|\vec{v}_D| = |\vec{v}_A| = 1{,}41 v_C = 2{,}82\frac{\text{м}}{\text{c}}.$$

$$v_K = \omega \cdot PK = 2v\sin\frac{\alpha}{2} = v_C = 2\frac{\text{м}}{\text{c}}.$$

6. Точки, обладающие в данный момент времени скоростью $|\vec{v}|$ = 2 м/с должны располагаться на расстоянии R от мгновенной оси вращения, т.е. от точки P (белая линия на рис. 1.221соответствует геометрическому месту таких точек).

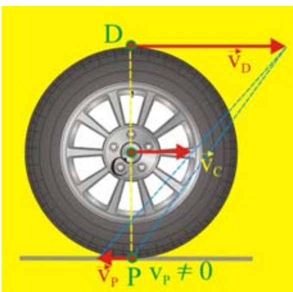

Рис. 1.222. Колесо

1.222. Колесо, с проскальзыванием катится по горизонтальной поверхности. Определить скорость центра колеса v_C, если известно что скорость нижней точки протектора колеса равна v_P = 2 м/с, а верхней точки – v_D = 10 м/с.

Решение

1. Периферийная точка колеса D расположена в два раза дальше чем центр колеса C от мгновенной оси вращения, но т.к. $v_P \neq 0$, то

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_P + \vec{v}_D}{2}; \quad v_C = \frac{v_D - v_p}{2} = 4\frac{м}{с}.$$

1.223. Винт самолёта вращается с частотой n =360 мин $^{-1}$. Скорость v поступательного движения самолёта при торможении во время посадки равна 54 км/ч. С какой скоростью $\vec{u}$ движется один из концов винта, если радиус R винта равен 1 м?

Решение

Рис. 1.223. Движение пропеллера

1. Движение точки 2 на периферии вращающегося винта можно рассматривать, как состоящее из поступательного совместно с центром пропеллера и вращательного вокруг этого центра. Линейная скорость точки 2 определится как

$$v_2 = 2\pi nR = 37{,}7 м/с.$$

2. Результирующая скорость $\vec{u}$ можно определить, осуществив параллельный перенос вектора скорости поступательного движения самолёта из точки 1 в точку 2. Векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ лежат в перпендикулярных плоскостях, поэтому модуль вектора результирующей скорости определится как:

$$|\vec{u}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cong 40{,}6 м/с.$$

3. Направление вектора результирующей скорости $\vec{u}$

$$(\vec{v}_1; \vec{u}) = \arcsin\frac{v_2}{u} \cong 68^0.$$

1.224. Цилиндр радиуса R зажат между двумя движущимися со скоростями v_1 и v_2 параллельными досками. С какой угловой скоростью вращается цилиндр, если проскальзывание отсутствует?

Решение

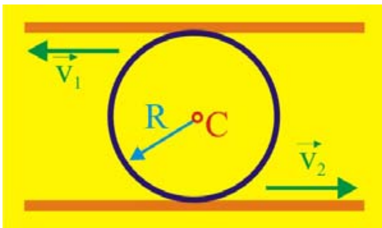

Рис. 1.224. Цилиндр и доски

1. Определим линейную скорость центра колеса C

$$v_C = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

2. Угловая скорость в соответствии с теоремой Леонарда Эйлера $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$, определится как

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{v_1 + v_2}{2R}.$$

1.225. Катушка с намотанной нитью лежит на горизонтальной поверхности и может катиться без скольжения. Внешний радиус катушки R, радиус намотки ниток – r. С какой скоростью v_c и в каком направлении будет перемещаться тоска C, если нить тянуть в горизонтальном направлении со скоростью v. Как изменится ответ, если нить сматывать сверху?

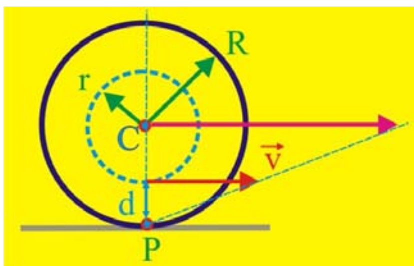

Рис. 1.225. Качение катушки

Решение

1. Мгновенный центр скоростей, как и при всяком плоском движении будет находиться в точке касания катушки плоскости, т.е. в точке P. В данный момент времени все точки катушки будут вращаться вокруг мгновенной оси, проходящей через точку P перпендикулярно плоскости чертежа. Линия действия вектора $\vec{v}$ отстоит от мгновенной оси вращения на расстоянии d_1, поэтому угловая скорость катушки определится как

$$\omega_1 = \frac{v}{d_1} = \frac{v}{R - r}.$$

2. Скорость центра катушки, при этом будет равна

$$v_C = \omega_1 R = \frac{vR}{R - r},$$

и катушка станет катиться вправо.

3. Если нить сматывать со скоростью v с верхней поверхности намотки, то поменяется расстояние до мгновенной оси вращения $d_2 = R + r$, угловая скорость катушки станет равной

$$\omega_2 = \frac{v}{R + r}.$$

4. Скорость центра катушки определится как

$$v_C = \omega_2 R = \frac{Rv}{R + r},$$

направление движения останется прежним.

1.226. Шарик радиусом R катится равномерно и без проскальзывания со скоростью v_O по двум параллельным рейкам, расстояние между которыми d С какими скоростями движутся верхняя и нижняя точки шарика относительно реек?

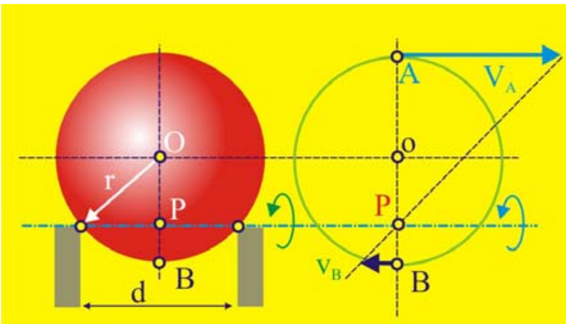

Рис. 1.226. Шарик, катящийся по рейкам

Решение

1. При качении шара по параллельным рейкам, (рис. 1.226) мгновенная ось вращения будет проходить между точками соприкосновения шара с рейками, поэтому угловая скорость вращения относительно мгновенной оси определится как:

$$\omega = \frac{v_O}{BP},$$

где $BP = \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ – расстояние от центра шарика до мгновенной оси вращения.

2. Угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{v_O}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{d^2}{2}\right)}}.$$

3. Скорость точки A в этом случае определится уравнением

$$v_A = \omega(r + oP) = \frac{v_O}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}}\left(r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right);$$

$$v_A = v_O + \frac{v_O r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}} .$$

4. Линейная скорость нижней точки шарика B

$$v_B = \omega(r - oP) = \frac{v_O r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}} - v_0 .$$

1.227. Автомобиль движется по закруглённому участку шоссе, имеющему радиус кривизны R = 40 м. Закон движения задан уравнением

$$s(t) = A + Bt + Ct^2 ,$$

где A = 5 м, B = 12 м/с, C = – 0,5 м/с^2. Определить скорость автомобиля v, его тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения для момента времени t = 4 с.

Решение

1. Уравнение скорости автомобиля получим путём дифференцирования заданного уравнения движения по времени

$$v = \frac{ds}{dt} = B + 2Ct ,$$

для момента времени t = 4 с

$$v = 12 - 4 = 8\frac{м}{с} .$$

2. Величина тангенциального ускорения

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2C ,$$

для заданного момента времени

$$a_\tau = -1\frac{м}{с^2} .$$

3. Нормальное ускорение автомобиля

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{64}{40} = 1{,}6\frac{м}{с^2} .$$

4. Модуль вектора полного ускорение автомобиля

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \cong 1{,}9\frac{м}{с^2} .$$

1.228. Угол поворота диска радиусом R = 0,1 м изменяется по закону

$$\varphi(t) = 4 + 2t - t^3 .$$

Найти зависимости от времени для угловой скорости диска, его углового ускорения и линейной скорости периферийных точек.

Решение

1. Определим угловую скорость диска путём дифференцирования заданного уравнения по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2 - 3t^2$$

2. Линейная скорость периферийных точек диска

$$v = \omega R = \left(2 - 3t^2\right)R .$$

3. Угловое ускорение диска определится в виде производной угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -6t\,.$$

1.229. Материальная точка движется по окружности радиуса R = 0,1 м. Пройденный точкой путь определяется уравнением

$$s = At\,,$$

где A = 1 м/с. Определить линейную и угловую скорости точки и число полных оборотов, сделанных за первые t = 5 с после начала движения.

Решение

1. Скорость точки определится в виде производной уравнения пути по времени

$$v = \frac{ds}{dt} = A = 1\frac{м}{с}\,.$$

2. Угловая скорость точки

$$\omega = \frac{v}{R} = 10\frac{рад}{с}\,.$$

3. Число полных оборотов за время t

$$N = \frac{vt}{2\pi R} = \frac{1\cdot 5}{6{,}28\cdot 0{,}1} \cong 8\ оборотов\,.$$

1.230. Частица движется по круговой траектории с постоянным угловым ускорением ε = 1 рад/с^2. Найти угол между вектором скорости частицы и ускорением через τ = 1 с после начала движения, если в начале движения частица покоится.

Решение

1. Запишем уравнение ускоренного движения частицы в угловых координатах

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2}\,.$$

2. Определим угловую скорость движения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon t\,.$$

3. Линейная скорость частицы $v = \omega R = \varepsilon Rt$.

4. Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon R\,.$$

5. Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon^2 R^2 t^2}{R} = \varepsilon^2 R t^2\,.$$

6. Угол между вектором ускорения и нормальной составляющей (вектором скорости)

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\varepsilon^2 R t^2}{\varepsilon R}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\left(\varepsilon t^2\right) = 45^\circ\,.$$

1.231. По дуге окружности радиусом R = 10м движется частица. В некоторый момент времени нормальное ускорение частицы a_n = 4,9 м/с^2; в этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол $\varphi = 60^0$. Найдите скорость и тангенциальное ускорение частицы.

Решение

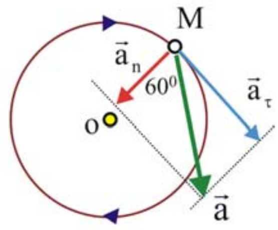

Рис. 1.231. Ускорение частицы

1. Из заданных и искомых векторов $\vec{a}_n, \vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$ можно образовать прямоугольный треугольник со всеми известными углами, что позволяет для определения искомых величин использовать традиционные тригонометрические уравнения

$$\sin\left(90^0 - \alpha\right) = \frac{a_n}{a}; \quad a = \frac{a_n}{\sin 30^o} = 9{,}8\frac{м}{c^2}.$$

2. Определим далее модуль тангенциального ускорения

$$a_\tau = \sqrt{a^2 - a_n^2} = 8{,}5 м/c^2.$$

3. Модуль скорости, при этом, будет равна

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{a_n R} = 7 м/c.$$

1.232. Частица движется по круговой траектории радиусом R = 2 м в соответствии с законом: $\varphi = 2 + 2t - t^2$. Определить путь s, пройденный частицей до остановки. Определить ускорение частицы в момент времени τ = 0,5 с.

Решение

1. Угловая скорость частицы равна производной по времени от угла поворота

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2 - 2t.$$

2. Закон изменения скорости частицы

$$v = \omega R = \left(2 - 2t\right)R = 2R - 2Rt.$$

3. Остановка частицы произойдёт при равенстве нулю её скорости

$$2R - 2Rt = 0,$$

откуда время до остановки определится как:

$$t_0 = \frac{2R}{2R} = 1 с.$$

4. Угол поворота до остановки частицы, когда ω = 0

$$\Delta\varphi = \varphi_0 + \omega t - \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \Delta\varphi = \varphi_0 - \frac{\varepsilon t_0^2}{2}; \quad \Delta\varphi = 2 - 1 = 1 рад.$$

5. Дуга, стягивающая угол $\Delta\varphi$

$$s = \Delta\varphi R = 2 м.$$

6. Скорость частицы в момент времени τ = 0,5 с

$$v_\tau = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 2\frac{м}{c}.$$

7. Нормальное ускорение частицы

$$a_n = \frac{v_\tau^2}{R} = 2\frac{м}{c^2}.$$

8. Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -2R = -4\frac{м}{c^2}.$$

9. Модуль полного ускорения частицы

$$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{20} \cong 4{,}5\frac{м}{c^2}.$$

1.233. По окружности радиуса R = 2 м одновременно движутся две частицы в соответствие с уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= 2 + 2t;\\ \varphi_2 &= -3 + 4t.\end{aligned}\right\}$$

Определить относительную скорость частиц в момент их встречи.

Решение

1. В момент встречи частиц углы их поворота совпадают

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad 2 + 2t = -3 + 4t; \quad \Rightarrow \quad t_B = 2{,}5\ с$$

2. Угловые и линейные скорости частиц

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt} = 2\frac{рад}{с};\\ \omega_2 &= \frac{d\varphi_2}{dt} = 4\frac{рад}{с};\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}v_1 &= \omega_1 R = 4\frac{м}{с};\\ v_2 &= \omega_2 R = 8\frac{м}{с}.\end{aligned}\right\}$$

3. Относительная скорость частиц в момент их встречи

$$v_r = v_1 + v_2 = 12\frac{м}{с}.$$

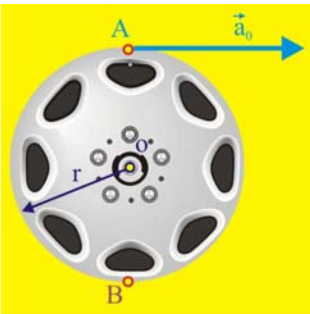

Рис. 1.234. Вращение диска

1.234. Автомобильный диск радиусом r = 0, 5 м приводится во вращение вокруг своей оси (рис. 1.234) намотанным канатиком который тянут с ускорением a_0 = 0,1 м/с^2. Определить нормальное a_n, тангенциальное a_τ и модуль полного ускорения нижней точки диска спустя t = 2 с после начала вращения.

Решение

1. Линейная скорость диска

$$v = a_0 t.$$

2. Тангенциальная составляющая ускорения точек, лежащих на ободе диска

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = a_0 = 0{,}1\frac{м}{с^2}.$$

3. Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{a_0^2 t^2}{r} = 0{,}08\frac{м}{с^2}.$$

4. Модуль вектора полного ускорения

$$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}08^2} \cong 0{,}128\frac{м}{с^2}.$$

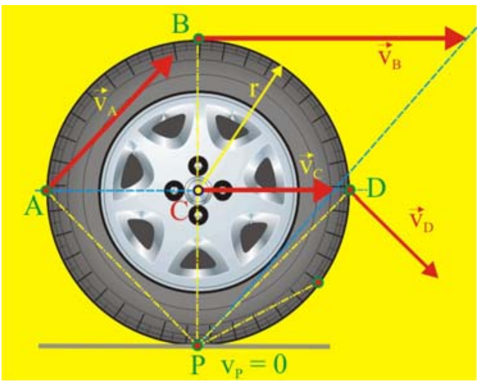

Рис. 1.235. Катящееся колесо

1.235. Скорость центра колеса радиусом R = 1 м, катящегося по горизонтальной поверхности без проскальзывания, изменяется во времени в соответствии с уравнением

$$v = 1 + 2t.$$

Найти скорости точек P, A, B, D, расположенных на ободе колеса (рис.1.235) для момента времени t = 0,5 с.

Решение

1. Определим угловую скорость вращения колеса вокруг мгновенной оси враще-

ния, проходящей через точку P перпендикулярно плоскости рисунка для заданного момента времени

$$v = \omega R; \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{1 + 2 \cdot 0{,}5}{1} = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

2. Линейные скорости заданных точек колеса определятся в виде произведения угловой скорости на кратчайшие расстояния от этих точек до мгновенной оси вращения, т.е. до точки P

$$v_P = 0;$$

$$v_A = \omega \cdot PA = \omega \cdot r\sqrt{2} = 2{,}82\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_B = \omega \cdot PB = \omega \cdot 2r = 4\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$|\vec{v}_D| = |\vec{v}_A| = \omega \cdot PD = \omega \cdot r\sqrt{2} = 2{,}82\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.236. Два одинаковых диска расположены, как показано на рис. 1.236. Диск 1 неподвижен, а диск 2 может без проскальзывания вращаться относительно диска 1. На какой угол повернётся диск 2, обойдя один раз диск 1?

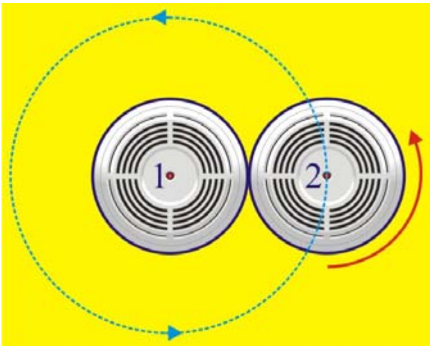

Рис. 1.236. Сателлит

Решение

1. Определим длину окружности, которую описывает центр движущегося диска

$$\ell = 2\pi \cdot 2r = 4\pi r,$$

где r – радиус дисков

2. Угол поворота сателлита

$$\Delta\varphi = \frac{\ell}{r} = 4\pi,$$

таким образом, движущийся диск при совершении одного оборота вокруг неподвижного диска вокруг собственной оси сделает два оборота.

1.237. Точка движется по окружности радиусом 2м согласно уравнению $\xi = At^3$ (A = 2м/с^3). В какой момент времени t нормальное ускорение будет равно тангенциальному ускорению? Какова будет величина полного ускорения в этот момент времени?

Решение:

1. Определим модули нормального и тангенциального ускорений

$$\dot{\xi} = 3At^2, \quad a_\tau = d\dot{\xi}/dt = 6At, \quad a_n = \dot{\xi}^2/R = (9A^2t^4)/R.$$

2. По условию задачи эти составляющие в искомый момент времени раны, поэтому

$$\frac{6A^2t^4}{R} = 6At, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{\frac{6R}{9A}} \cong 0{,}873\text{с}.$$

3. Теперь нет препятствий для определения значений нормального и тангенциального ускорений для найденного момента времени, а в виду их равенства вполне достаточно определить одно их них, например a_τ

$$a_\tau = 6At \cong 10{,}5\text{м}/\text{с}^2.$$

4. Модуль полного ускорения для данного движения определится так:

$$a = \sqrt{2a_\tau^2} = \sqrt{2a_n^2} \cong 14{,}85\text{м}/\text{с}.$$

1.238. Частица движется в плоскости в соответствии с уравнением движения, заданным в векторной форме уравнением

$$\vec{r}(t) = \vec{i}At^3 + \vec{j}Bt^2 \text{ (A = 1м/с}^3\text{, B = 2 м/с}^2\text{).}$$

определите для момента времени τ = 1с вектор полного ускорения частицы, нормальную и тангенциальную составляющие ускорения, радиус кривизны траектории.

1. Уравнение вектора скорости определится путём дифференцирования по времени заданного уравнения движения

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}3At^2 + \vec{j}2Bt\,.$$

Модуль вектора скорости частицы для заданного момента времени τ найдём, используя заданное уравнение движения

$$v_x = 3At^2, \quad v_{1x} = 3\,\text{м/с}, v_y = 2Bt, v_{1y} = 4\,\text{м/с}\,,$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{25} = 5\,\text{м/с}\,.$$

Направление вектора скорости $\vec{v}_1$ (угол между вектором скорости и положительным направлением оси Ox) определится как

$$\left(\vec{i};\vec{v}_1\right) = \arcsin\frac{v_{1x}}{|\vec{v}_1|} = \arcsin\frac{3}{5} \cong 37^0$$

2. Вектор ускорения, при этом в соответствие с заданным уравнением движения изменяется во времени по закону

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}6At + \vec{j}2B\,.$$

3. Определим далее модуль вектора полного ускорения, воспользовавшись полученным векторням уравнением

$$a_x = 6At, \quad a_y = 2B\,, \; a_{1x} = 6\,\text{м/с}^2, \quad a_{1y} = 4\,\text{м/с}^2, \quad |\vec{a}_1| = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} \cong 7{,}7\,\text{м/с}^2\,.$$

4. Направление вектора ускорения определим посредствам направляющих косинусов

$$\cos\left(\vec{a};\vec{i}\right) = \frac{a_{1y}}{|\vec{a}|}, \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{a};\vec{i}\right) = \arccos\left(\frac{a_{1y}}{|\vec{a}|}\right) \cong 58{,}7^0\,.$$

5. Тангенциальная составляющая ускорения, направленная по касательной к данной точке траектории, определяет изменение скорости по модулю, поэтому определим её в виде проекции вектора полного ускорения на направление касательной

$$a_{1\tau} = |\vec{a}_1| \cdot \cos\left[\left(\vec{a}_1;\vec{i}\right) - \left(\vec{v}_1;\vec{i}\right)\right] \cong 7{,}1\,\text{м/с}^2\,.$$

6. Нормальная составляющая ускорения, определяющая изменение скорости по направлению, определится из следующих соображений

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \qquad a_{1n} = \sqrt{|\vec{a}_1|^2 - a_{1\tau}^2} \cong 3\,\text{м/с}^2\,.$$

4. Радиус кривизны траектории ρ можно найти, в частности, используя уравнение нормального ускорения

$$a_{1n} = \frac{v_1^2}{\rho}, \quad \Rightarrow \rho = \frac{v_1^2}{a_{1n}} \cong 8{,}3\,\text{м}\,.$$

5. Определим вид траектории, по которой движется частица, для чего представим заданное векторное уравнение движения в координатной форме

$$r_x \equiv x = At^3, \quad r_y \equiv y = Bt^2,$$

$$t = \sqrt[3]{x/A}, \Rightarrow y(x) = Bx^{\frac{3}{2}} = 2x^{1{,}5}\,.$$

Движение тела, брошенного горизонтально

1.239. В каком случае выпавший из окна автомобиля предмет упадёт на землю раньше: когда автомобиль стоит на месте или когда движется?

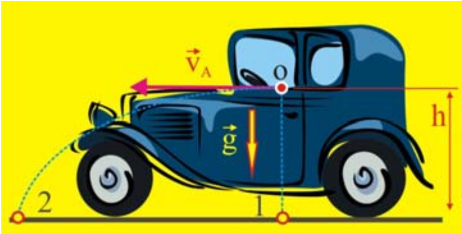

Рис. 1.239. Падение предмета

Решение

1. Предмет, выпавший из окна движущегося со скоростью v_A автомобиля с высоты h над поверхностью земли (рис. 1.239) будет двигаться по параболической траектории с начальной скоростью, совпадающей со скоростью автомобиля. Такое движение можно представить, как состоящее из горизонтального равномерного движения и ускоренного движения по вертикальной координате, при этом

$$x(t) = v_A t; \quad y(t) = \frac{gt^2}{2}; \quad \Rightarrow t = \sqrt{2gh},$$

как видно время падения предмета зависит только от высоты падения и величины ускорения свободного падения, следовательно, горизонтальная скорость на время падения не влияет, она определяет только точку приземления.

1.240. Горизонтально летящая пуля пробивает последовательно два листа бумаги, отстоящих друг от друга на расстоянии L = 30 м. Отверстия в листах оказались смещёнными по вертикали на расстояние $h = 2\cdot 10^{-3}$ м. С какой скоростью пуля подлетела к первому листу?

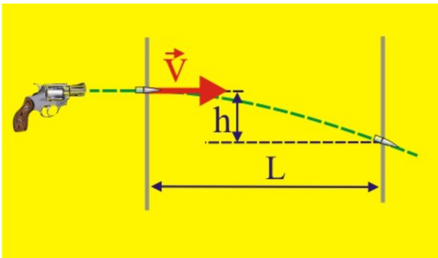

Рис. 1.240. Определение скорости пули

Решение

1. Запишем систему уравнений описывающих полёт пули между листами бумаги (рис. 1.240)

$$\left.\begin{aligned} L &= vt; \\ h &= \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из второго уравнения время и подставим полученное значение в первое уравнение системы

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad L = v\sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad \Rightarrow \quad v = L\sqrt{\frac{g}{2h}} = 30\sqrt{\frac{10}{4\cdot 10^{-3}}} \cong 1{,}5\cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.241. С самолёта, летящего горизонтально со скоростью v_0, на высоте H выбрасывают без начальной относительно самолёта скорости груз. На какой высоте h скорость груза будет направлена под углом α к горизонту. Найти радиус кривизны траектории ρ на данной высоте. Чему равно расстояние L между грузом и самолётом в момент касания им земли?

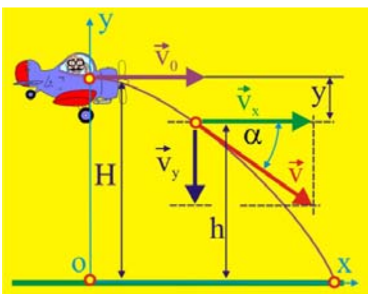

Рис. 1.241. Падение тела

Решение

1. Угол α, образованный вектором скорости в заданной точке траектории и вектором горизонтальной составляющей скорости $v_x = v_0$ определится из прямоугольного треугольника, построенного на этих векторах

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_0}.$$

2. Запишем далее уравнения движения груза по вертикальной оси с ускорением g

$$\left.\begin{aligned} v_y &= gt; \\ y &= \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

3. Из второго уравнения системы выразим время и подставим полученное значение в первое уравнение

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}; \quad v_y = g\sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{2gy}.$$

4. Подставим значение v_y в уравнение $\mathrm{tg}\alpha$ и разрешим его относительно y

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2gy}}{v_0}; \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha v_0^2}{2g}.$$

5. Высота h над уровнем земной поверхности определится в виде разности

$$h = H - \frac{\mathrm{tg}^2\alpha v_0^2}{2g}.$$

6. Определим радиус кривизны траектории на высоте h

$$\rho = \frac{v_0^2 + g^2t^2}{g\cos\alpha} = \frac{v_0^2 + g^2\dfrac{2y}{g}}{g\cos\alpha} = \frac{v_0^2 + g\dfrac{2\mathrm{tg}^2\alpha v_0^2}{2g}}{g\cos\alpha} = \frac{v_0^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right)}{g\cos\alpha}.$$

7. Расстояние между самолётом и предметом в момент его касания земли будет равно высоте полёта самолёта Н.

1.242. Тело брошено горизонтально, так что через $\tau = 5$ с после броска угол между вектором скорости и ускорения стал равным $\beta = 45^o$. Определить скорость тела в этот момент времени. В какой момент времени скорость тела будет в два раза больше его начальной скорости?

Решение

1. Заданная величина угла $\beta = 45^o$ говорит о том, что в заданный момент времени проекция вертикальной составляющей скорости по модулю равна проекции горизонтальной составляющей

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_y\sqrt{2} = g\tau\sqrt{2} \cong 70{,}5\,\frac{м}{с}.$$

2. Время достижения удвоенной скорости

$$gt = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = g\tau\sqrt{3}; \quad \Rightarrow \quad t = \tau\sqrt{3} = 9\ \text{с}.$$

1.243. Танк, расположенный на вершине горы, производит горизонтальные выстрелы. Снаряды разрываются на расстоянии 5 км ниже по склону. Определить начальную скорость снаряда, если склон образует с горизонтом угол $\alpha = 30^0$.

Решение

1. Горизонтальная составляющая скорости снаряда будет постоянной и равной v_0, это даёт основание определить горизонтальное перемещение снаряда за время t в виде

$$v_0 t = x_{max}\cos\alpha .$$

2. Изменение вертикальной координаты снаряда будет протекать в соответствии с уравнений

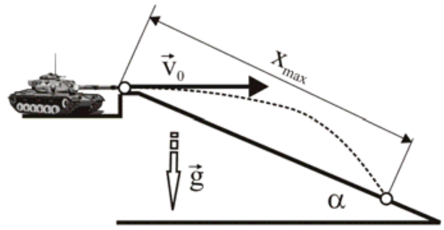

Рис. 1.243. Стрельба вдоль склона

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} = x_{max}\sin\alpha .$$

3. Выразим далее из уравнения горизонтального движения время

$$t = \frac{x_{max}\cos\alpha}{v_0},$$

$$\frac{g}{2}\frac{x_{max}^2\cos^2\alpha}{v_0^2} = x_{max}\sin\alpha .$$

4. Разрешая последнее уравнение относительно искомой начальной скорости снаряда, получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx_{max}\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}} \cong 194 м/с .$$

1.244. Движение частицы по криволинейной траектории задано уравнениями:

$x = At^3$; $y = Bt$; (A = 1м/с^3, B = 2 м/с).

Найдите для момента времени t_1 = 0,8с: а) уравнение траектории частицы; б) её скорость; в) модуль полного ускорения; г) перемещение частицы.

Решение

1. Для определения уравнения траектории необходимо из заданных уравнений движения исключить время, это можно сделать, выразив его из второго уравнения и подставив в первое

$$t = \frac{y}{B}; \quad x = A\frac{y^3}{B^3},$$

$$y = B\sqrt[3]{\frac{x}{A}} = 2\sqrt[3]{x}.$$

2. Подставим в заданные уравнения движения значение времени t_1 и определим положение частицы на траектории

$$x_1 = 0{,}512 м, \quad y_1 = 1{,}6 м .$$

В начальный момент времени при t = 0 частица находится в начале системы координат.

3. Определим модуль и направление вектора перемещения частицы $\vec{r}$ за время t_1

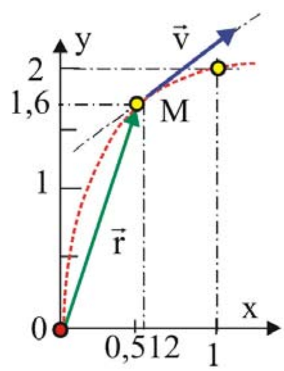

Рис. 1.244. Траектория и перемещение частицы

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cong 1{,}68 м ,$$

$$(\vec{r};\vec{i}) = \arccos\frac{x_1}{|\vec{r}|} \cong 72^0 .$$

4. Дифференцируя уравнения движения по времени, найдём проекции скорости на оси координат, модуль скорости и его направление

$$v_x = 3At^2; \quad v_y = B.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9A^2t^4 + B^2} = \sqrt{7{,}68} \cong 2{,}8 м/с.$$

$$(\vec{v};\vec{i}) = \arccos(v_x/|\vec{v}|) \cong 47^0.$$

5. Модуль вектора полного ускорения

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} = \sqrt{(6At)^2} \cong 4{,}8 м/с^2.$$

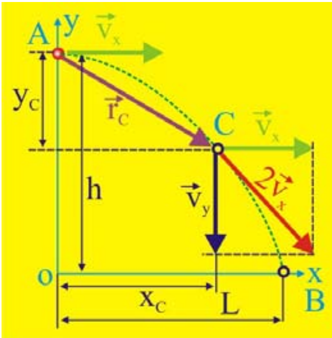

Рис. 1.245. Горизонтальный бросок тела

1.245. Тело, брошенное горизонтально с высоты h = 80 м, упало на землю на расстоянии L = 60 м. Найти перемещение тела за время, течение которого скорость увеличилась в n =2 раза. Какой угол вектор перемещения составляет с горизонтальной осью.

Решение

1. Запишем уравнение увеличившейся в n = 2 раза скорости вертикально брошенного предмета

$$2v_x = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + g^2t_C^2},$$

где t_C – время полёта тела в тоску С траектории, где скорость станет в два раза больше начальной скорости v_x.

$$4v_x^2 = v_x^2 + g^2t_C^2; \quad \Rightarrow \quad t_C = \sqrt{\frac{3v_x^2}{g^2}} = \frac{v_x}{g}\sqrt{3}.$$

2. Определим начальную скорость броска v_x

$$v_x = \frac{L}{t_B} = \frac{L}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{60}{\sqrt{16}} = 15\frac{м}{с}.$$

3. Подставим полученное значение начальной скорости броска в уравнение для t_C

$$t_C = \frac{15}{10}\sqrt{3} \cong 2{,}6 \text{ с}.$$

4. Координаты точки С

$$\left.\begin{aligned} x_C &= v_x t_C = 39 \text{ м}; \\ y_C &= \frac{gt_C^2}{2} = 33{,}7 \text{ м}. \end{aligned}\right\}$$

5. Модуль вектора перемещения

$$|\vec{r}_C| = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{39^2 + 33{,}7^2} \cong 51{,}8 \text{ м}$$

6. Угол вектора перемещения в горизонталью

$$tg\alpha = \frac{v_{y(C)}}{v_x} = \frac{gt_C}{v_x}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{gt_C}{v_x}\right) = arctg\left(\frac{10\cdot 2{,}6}{15}\right) = 60^o.$$

1.246. Тело брошено горизонтально с горы высотой h = 80 м с начальной скоростью v_0 = 25 м/с. Найти перемещение и угол, который составляет перемещение с горизонтом, между двумя точками полёта тела, которых скорости соответственно v_1 = 30 м/с и v_2 = 40 м/с.

Решение

1. Найдём время падения тела в точки1 и 2 (рис.1.246)

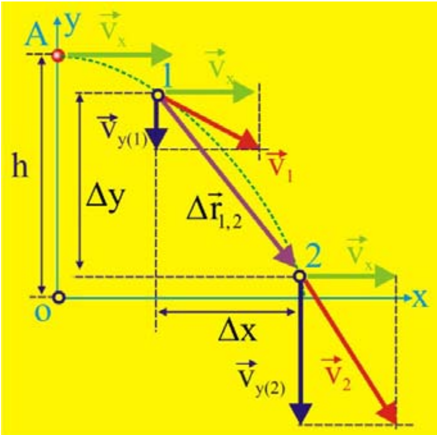

Рис. 1.246. Перемещение тела

$$v_1 = gt_1; \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_1}{g} = 3\ \text{с};$$

$$v_2 = gt_2; \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_2}{g} = 4\ \text{с}.$$

2. Определим координаты точек 1 и 2

$$y_1 = h - \frac{gt_1^2}{2} = 35\,\text{м}; \quad y_2 = h - \frac{gt_2^2}{2} = 0; \quad \Delta y = 35\ \text{м}.$$

$$x_1 = v_x t_1 = 75\ \text{м}; \quad x_2 = v_x t_2 = 100\ \text{м}; \quad \Delta x = 25\ \text{м}.$$

3. Найдём модуль вектора перемещения

$$\left|\vec{r}_{1,2}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{25^2 + 35^2} = 43\,\text{м}.$$

4. Угол между вектором перемещения и горизонтальной осью

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong 54^\circ.$$

1.247. Вертолет летит горизонтально со скоростью v = 44,44 м/с на высоте h = 500 м. С вертолёта нужно сбросить вымпел на идущий встречным курсом корабль, следующий со скоростью u = 5,56 м/с. С каким упреждением по горизонтали x пилот вертолёта должен сбросить вымпел (рис. 1.247)?

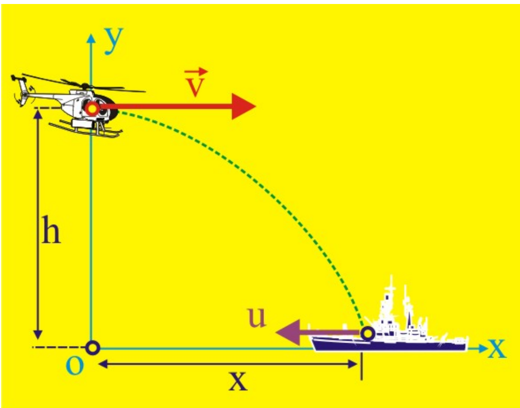

Рис. 1.247. Вертолёт и корабль

Решение

1. Время падения вымпела до палубы корабля с высоты h

$$h = \frac{gt^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 10\ \text{с}.$$

2. Начальная скорость вымпела в данном случае будет равна сумме скоростей вертолёта и корабля

$$v_x = v + u = 50\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Расстояние x с которого следует отпустить вымпел

$$x = v_x t = 500\ \text{м}.$$

1.248. С башни высотой h = 30 м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью v_0 = 10 м/с. Определить: а) уравнение траектории тела; б) скорость тела в момент касания земли; в) угол, который образует вектор скорости тела в момент касания поверхности земли.

Решение

1. Уравнение траектории определится путём исключения времени из уравнений движения, при этом целесообразно начало системы отсчёта расположить в точке броска, а вертикальную координату совместить с направлением ускорения свободного падения

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t; \\ y &= \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\} \quad t = \frac{x}{v_0}; \quad y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}x^2 = kx^2 \quad - \quad \text{парабола}.$$

2. Время падения тела с высоты h

$$t = \sqrt{2h/g}\,.$$

3. Модуль скорости тела при касании земли

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 26{,}2\frac{м}{с}$$

4. Угол между вектором скорости и горизонталью

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}; \quad \alpha = arctg\frac{24{,}5}{10} \cong 67{,}8^0\,.$$

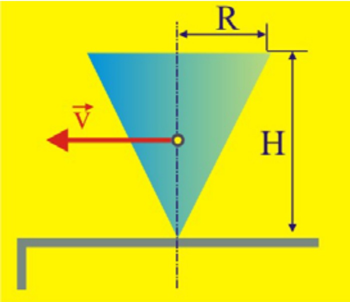

Рис. 1.249. Волчок на столе

1.249. По гладкому столу движется, вращаясь вокруг соей оси, волчок, имеющий в проекции форму конуса (рис. 1.249) высотой H и радиусом R. При какой минимальной скорости поступательного движения v волчок не ударится о край стола при соскоке?

Решение

1. Определим время в течение которого конус высотой H пролетит край стола

$$H = \frac{gt^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

2. С другой стороны, за это же время t волчок, в проекции всё тот же конус, должен пролететь в горизонтальном направлении расстояние, равное радиусу основания конуса R, причём скорость горизонтального движения v должна быть не меньше некоторой определённой величины. При нахождении вершины конуса на крайней кромке стола, величину требуемой скорости можно записать следующим образом

$$R = v_{min}t = v_{min}\sqrt{\frac{2H}{g}}; \quad \Rightarrow \quad v_{min} = R\sqrt{\frac{g}{2H}}\,.$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

1.250. Небольшое тело с начальной скоростью v_0, брошено под углом α к горизонту. Найти: а) горизонтальную и вертикальную составляющие скорости в функции времени; б) зависимость координат тела от времени; в) уравнение траектории; г) полное время полёта; д) максимальную высоту подъёма над горизонтом и максимальную дальность броска.

Решение

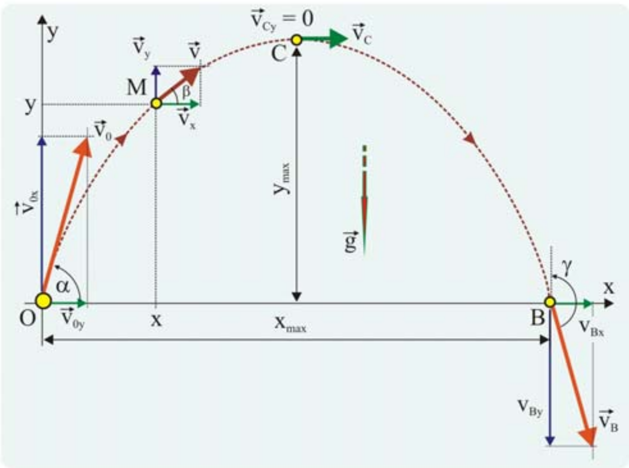

Рис. 1.250. Тело, брошенное под углом α к горизонту

1. Тело, брошенное в поле земного тяготения с начальной скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту будет двигаться по криволинейной траектории, лежащей в плоскости, перпендикулярной поверхности земли. Существенно отметить, движение протекает при постоянном по модулю и направлению ускорении $\vec{g}$. Это даёт возможность разложить криволинейное движение на два более простых: равномерное – вдоль горизонтальной оси т.к. $g_x = 0$ и ускоренное по вертикальной оси, где проявляется двояко ускорение свободного падения (рис. 1.250).

2. Движение исследуемого тела относительно вертикальной оси из начальной точки O в точку C – равнозамедленное, а из точки C в точку B – равноускоренное с ускорением свободного падения $\vec{g}$. В начальный момент времени при t = 0 имеем:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,$$
$$v_{0x} = v_0\cdot\cos\alpha,\ v_{0y} = v_0\cdot\sin\alpha,$$
$$a_x = 0,\ a_y = -g.$$

3. Для проекций скорости в любой момент времени, например в точке M, движения можно записать следующие уравнения

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha, \\ v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt. \end{cases}$$

4. Модуль вектора скорости в соответствии с уравнением определится как

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2};$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \left(v_0^2\sin^2\alpha - 2v_0\sin\alpha gt + g^2t^2\right)};$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) - 2v_0gt\sin\alpha + g^2t^2}\ .$$

5. Положение вектора скорости определим, используя свойства прямоугольного треугольника, построенного на векторе скорости и его проекциях

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}_x|},\quad \Rightarrow\quad \beta = \mathrm{arctg}\frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}\ .$$

6. Уравнения движения запишем, используя особенности равномерного перемещения точки по горизонтали и равноускоренного по вертикали

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha, \\ y(t) = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

7. Время подъёма тела в верхнюю точку траектории С определим, используя второе уравнение системы при условии: $v_y = 0$

$$v_0\sin\alpha - gt_C = 0, \quad \Rightarrow t_C = \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

8. Определим далее полное время полёта

$$\tau = 2t_C = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

9. При подстановке времени полёта τ в первое уравнение системы, описывающей зависимость координат от времени, получим максимальную дальность броска

$$x_{max} = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

10. Из последнего уравнения, в частности, следует, что при прочих равных условиях максимальная дальность броска будет иметь место при $\alpha = 45^0$, т.к. в этом случае

$2\alpha = \pi/2$, $\sin 2\alpha = 1$.

11. Максимальная высота подъёма определится путём подстановки времени τ во второе уравнение системы $y = f(t)$

$$y_{max} = v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g^2},$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

12. Уравнение траектории получается при исключении времени из уравнений $x = f(t)$ и $y = f(t)$. Из первого уравнения:

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha},$$

при подстановке этого значения t во второе уравнение, получим

$$y = v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Если ввести обозначения: $\mathrm{tg}\alpha = a$, $g/\left(2v_0^2\cos^2\alpha\right) = b$, то уравнение траектории примет более классифицируемый вид

$$y = ax - bx^2.$$

1.251. Под каким углом α к горизонту необходимо бросить тело, чтобы максимальная высота подъёма была в два раза меньше дальности броска?

Решение

1. Воспользуемся уравнениями максимальной дальности броска x_{max} и максимальной высоты подъёма над горизонтом y_{max} при заданных условиях

$$x_{max} = 2y_{max};$$

$$\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g};$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2; \quad \alpha = \mathrm{arctg}2 \cong 63{,}5^o$$

1.252. Два тела брошены под углом α и $(90^o - \alpha)$ к горизонту с одинаковой начальной скоростью. Найти отношение дальностей полёта тел и высот их подъёма.

Решение

1. Дальнейшие тригонометрические преобразования производятся исходя из условия:

$$\sin\alpha = \cos\left(90^o - \alpha\right).$$

2. Запишем уравнения максимальной дальности броска

$$x_{max(1)} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}; \quad x_{max(2)} = \frac{2v_0^2 \sin(90^o - \alpha)\cos(90^o - \alpha)}{g};$$

$$\frac{x_{max(1)}}{x_{max(2)}} = 1.$$

3. Далее сравним высоты максимального подъёма над горизонтом

$$y_{max(1)} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}; \quad y_{max(2)} = \frac{v_0^2 \sin^2(90^o - \alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2g};$$

$$\frac{y_{max(1)}}{y_{max(2)}} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha.$$

1.253. Какой начальной скоростью должна обладать сигнальная ракета, чтобы будучи выпущенная под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту, вспыхнула в наивысшей точке своей траектории, если время горения запального устройства составляет $t = 6$ с?

Решение

1. Запишем систему уравнений, определяющих зависимость проекций скорости ракеты на оси декартовой системы координат

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha, \\ v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt. \end{cases}$$

2. В наивысшей точке траектории (рис. 1.250), вертикальная составляющая скорости равна нулю, т.е.

$$v_0\sin\alpha - gt = 0; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{gt}{\sin\alpha} = \frac{10\cdot 6}{0{,}707} \cong 85\frac{м}{с}.$$

1.254. Два тела брошены с поверхности земли под углами $\alpha_1 = 30^o$ и $\alpha_2 = 45^o$ к горизонту из одной точки. Каково отношение их начальных скоростей, если максимальная дальность их полёта одинакова?

Решение

1. Воспользуемся условием равенства максимальных дальностей полёта тел брошенных под разными углами к горизонту

$$x_{max(1)} = \frac{2v_{0(1)}^2 \sin\alpha_1\cos\alpha_1}{g} = \frac{v_{0(1)}^2 \sin 2\alpha_1}{g};$$

$$x_{max(2)} = \frac{2v_{0(2)}^2 \sin\alpha_2\cos\alpha_2}{g} = \frac{v_{0(2)}^2 \sin 2\alpha_2}{g}.$$

2. Поскольку $x_{max(1)} = x_{max(2)}$, то

$$\frac{v_{0(1)}^2 \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{v_{0(2)}^2 \sin 2\alpha_2}{g};$$

$$\frac{v_{0(1)}}{v_{0(2)}}=\sqrt{\frac{\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1}}=\sqrt{\frac{\sin 90^o}{\sin 60^o}}\cong 1{,}075\,.$$

1.255. Артиллерийское орудие находится на расстоянии x_{max} = 5,1·10^3 м от цели по горизонтали. За какое минимальное время снаряд с начальной скоростью v_0 = 240 м/с достигнет цели?

Решение

1. Из уравнения максимальной дальности полёта снаряда определим необходимый угол стрельбы

$$x_{max}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g};\quad\Rightarrow\quad \sin 2\alpha=\frac{x_{max}g}{v_0^2};\quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x_{max}g}{v_0^2};$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\arcsin\frac{5{,}1\cdot 10^4}{5{,}76\cdot 10^4}\cong 31{,}1^0\,.$$

2. Время полёта снаряда до цели

$$\tau_{min}=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{2\cdot 240\cdot\sin 31{,}1^0}{10}\cong 24{,}8\text{ с}\quad(0{,}41\text{ мин});$$

Если стрелять под углом α = 60^o, то время полёта снаряда составит

$$\tau=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{2\cdot 240\cdot\sin 60^0}{10}\cong 41{,}57\text{ с}\quad(0{,}7\text{ мин}).$$

1.256. Мальчик бросает мяч с начальной скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 45^o к горизонту в сторону стены, расположенной на расстоянии L = 4 м от точки броска. На каком расстоянии от стены должен встать мальчик, чтобы поймать мяч, если удар мяча о стену абсолютно упругий?

Решение

1. Определим максимальную дальность броска при заданных условиях

$$x_{max}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{100\cdot 1}{10}=10\text{м}\,.$$

2. Поскольку мяч до абсолютно упругого удара о стену пролетел всего лишь 4 м, то его отскок от стены произойдёт на расстояние

$$x_1=x_{max}-L=6\text{ м}\,,$$

чтобы поймать мяч мальчику за время полёта мяча надо отбежать от точки броска (от стены) на 2 м.

1.257. Тело брошено со скоростью v_0 = 20 м/с под углом α = 60^o к горизонту. Найти координаты точек траектории тела, в которых вектор скорости составит с горизонтом угол β = 45^o, если точка броска расположена в начале системы отсчёта.

Решение

1. Заданными кинематическими характеристиками тело за всё время полёта будет обладать дважды (рис. 1.257), причём вертикальные координаты будут совпадать, а горизонтальные − соответствующие β = 45^o, ввиду симметрии па-

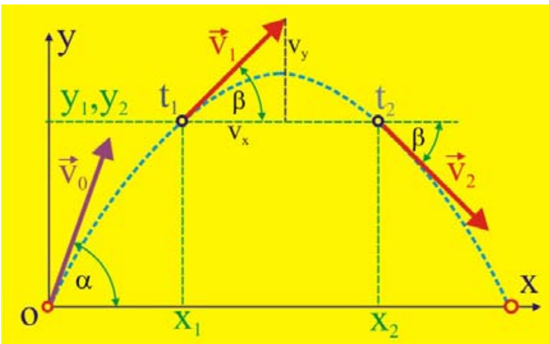

Рис. 1.257. Траектория движения

раболической траектории будут разными.

2. Запишем уравнение для определения направления вектора скорости по его проекциям, которые представляются двумя катетами в прямоугольном треугольнике

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\left|\vec{v}_y\right|}{\left|\vec{v}_x\right|}, \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{v}_y\right| = \left|\vec{v}_x\right|\mathrm{tg}\beta\ .$$

3. Проекции скорости тела при его броске под углом к горизонту определяются уравнениями

$$v_x = v_0\cos\alpha;$$

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

4. Подставим значение проекций скорости в предыдущее уравнение

$$v_0\sin\alpha - gt = \pm v_0\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,,$$

и разрешим полученное соотношение относительно времени

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{g}\left(\sin\alpha \pm \mathrm{tg}\beta\cos\alpha\right),$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\left(\sin\alpha - \mathrm{tg}\beta\cos\alpha\right) = 2\left(\sin 60^\circ - \mathrm{tg}45^\circ\cos 60^\circ\right) \cong 0{,}73\ \text{с}\,,$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\left(\sin\alpha + \mathrm{tg}\beta\cos\alpha\right) = 2\left(0{,}87 + 0{,}5\right) = 2{,}73\ \text{с}\,.$$

5. По известному времени полёта определим соответствующие координаты, воспользовавшись уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha, \\ y(t) = v_0 t\sin\alpha \mp \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

$$y_{1,2} = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 20\cdot 0{,}73\cdot 0{,}866 - \frac{10\cdot 0{,}73^2}{2} \cong 10\ \text{м}\,.$$

$$x_1 = v_0 t_1\cos\alpha = 20\cdot 0{,}73\cdot 0{,}5 = 7{,}3\ \text{м}\,,$$

$$x_2 = v_0 t_2\cos\alpha = 20\cdot 2{,}73\cdot 0{,}5 = 27{,}3\ \text{м}\,.$$

1.258. Из шланга, установленного на земле, под углом α = 30°к горизонту бьёт струя воды с начальной скоростью v_0 = 15 м/с. Площадь сечения струи по всей её длине постоянна и равна S = $1\cdot 10^{-4}$ м^2. Определить массу воды, находящейся в воздухе.

Решение

1. Масса воды в струе определится в виде произведения плотности воды $\rho = 1\cdot 10^3$ кг/м^3 на полный объём струи

$$m = \rho\ell S\,,$$

где ℓ – протяжённость параболической траектории, которую имеет водяная струя от среза шланга до падения на поверхность земли

$$\ell = v_0\tau\,,$$

где τ – время полёта некоторой частички воды от выходного отверстия до поверхности

$$\tau = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\,.$$

2. Масса воды, находящейся одновременно в воздухе

$$m = \rho S\frac{2v_0\sin\alpha}{g}v_0 = \frac{2\rho S v_0^2\sin\alpha}{g} = \frac{2\cdot 10^3\cdot 10^{-4}\cdot 225\cdot 0{,}5}{10} \cong 2{,}25\ \text{кг}\,.$$

1.259. Мяч, брошенный с начальной скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 45° к горизонту, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии L = 3 м от точки бросания. Когда происходит удар мяча о стенку, на восходящей или спадающей ветви траектории? На какой высоте h мяч ударится о стенку. Какова будет скорость мяча в момент удара?

Решение

1. Время подъёма мяча в наивысшую точку траектории

$$t_C = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

при этом, перемещение в горизонтальном направлении составит

$$x_C = v_0 t_C \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{100\cdot 1}{20} \cong 5\ \text{м}.$$

Поскольку $x_C > L$, то встреча мяча со стенкой произойдёт на восходящей ветви траектории.

2. Определим время полёта мяча до стенки

$$L = v_0 t\cos\alpha; \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{L}{v_0\cos\alpha} = \frac{3}{10\cdot 0{,}707} \cong 0{,}42\ \text{с}.$$

3. Вертикальная координата мяча h в момент встречи со стенкой

$$h = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 10\cdot 0{,}42\cdot 0{,}707 - \frac{10\cdot 0{,}176}{2} \cong 1{,}82\ \text{м}$$

4. Модуль скорости мяча в момент удара

$$v_x = v_0\cos\alpha = 7{,}07\ \text{м/с}$$

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt = 10\cdot 0{,}707 - 4{,}2 = 2{,}87\ \text{м/с},$$

$$|v_B| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cong 7{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. Направление вектора скорости с горизонтом

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg}\frac{2{,}87}{7{,}07} \cong 22^\circ.$$

1.260. Тело брошено со скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 45° к горизонту. Найти радиус кривизны траектории ρ чрез время τ = 1 с после начала движения.

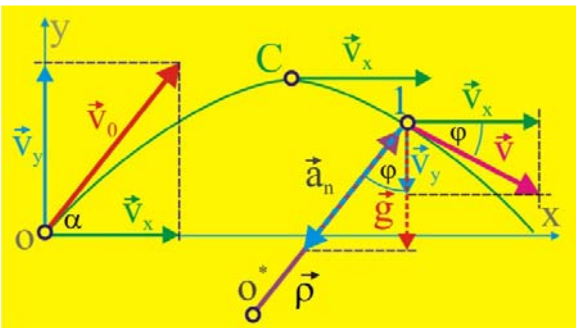

Рис. 1.260. Кривизна траектории

Решение

1. Чтобы оценить местоположение искомой точки, определим время восхождения тела в верхнюю точку своей траектории

$$t_C = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{20\cdot 0{,}707}{10} \cong 0{,}7\ \text{с},$$

следовательно, искомая точка 1 (рис. 1.260) будет находиться на спадающей ветви параболической траектории.

2. Можно представить, что тело бросили из тоски С с горизонтальной скоростью

$$v_x = v_0\cos\alpha = 7{,}07\ \text{м/с},$$

которое за время 0,3, опустившись из точки С в точку 1, с набрало вертикальную скорость

$$v_y = g(\tau - t_C) = 3\ \text{м/с}.$$

3. Модуль полной скорости в точке траектории 1

$$\left|\vec{v}_1\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cong 7{,}7\ м/с .$$

4. Нормальное ускорение a_n в рассматриваемой точке траектории

$$a_n = g\sin\varphi = g\frac{v_x}{\left|\vec{v}\right|} = 10\cdot 0{,}9 = 9\ м/с^2 .$$

5. Радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{a_n} = 6{,}6\ м .$$

1.261. Под каким углом α под углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы радиус кривизны траектории в начальный момент его движения был в η = 8 раз больше, чем в верхней точке траектории?

Решение

1. Определим радиус кривизны траектории в начальной точке траектории

$$a_{n(0)} = g\cos\alpha ;\quad \rho_0 = \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{g\cos\alpha} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} .$$

2. Радиус кривизны в наивысшей точке траектории

$$a_{n(C)} = g;\quad \left|\vec{v}\right| = v_0\cos\alpha;\quad \rho_C = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g} .$$

3. Запишем заданное по условию задачи соотношение между радиусами кривизны

$$\frac{v_0^2}{g\cos\alpha} = \frac{\eta v_0^2\cos^2\alpha}{g};\quad \frac{1}{\cos\alpha} = \eta\cos^2\alpha;\quad 1 = \eta\cos^3\alpha;\quad \cos^3\alpha = \frac{1}{\eta};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\eta}}\right) = \arccos\frac{1}{2} = 60^{\circ} .$$

1.262. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь в точках, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени при движении шарика слева направо равен T_1, а при движении справа налево – T_2. Определить радиус лунки между точками отскока шарика.

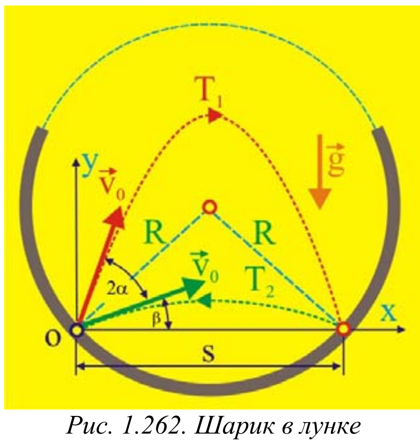

Рис. 1.262. Шарик в лунке

Решение

1. В точках упругого отскока шарика от поверхности лунки радиус является перпендикуляром к касательной в этих точках, поэтому задачу можно рассматривать как бросок двух одинаковых тел из точки о с равными по модулю начальными скоростями, направленными под разными углами к горизонту (рис. 1.262).При отскоке вправо обозначим угол между начальной скоростью и горизонталью через β, а влево – через $(2\alpha + \beta)$, причём дальность полёта в обоих случаях одинакова и равна s

$$s = \frac{v_0^2\sin 2\beta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2(\beta + 2\alpha)}{g},$$

$$\sin 2\beta = \sin 2(\beta + 2\alpha),$$

последнее равенство возможно при условии

$$\beta + \alpha = 45^{\circ} .$$

2. Радиус лунки в этом случае можно представить следующим образом

$$R = \frac{s}{2\cos(\alpha + \beta)}.$$

3. Определим расстояние s, для чего воспользуемся уравнениями движения шариков в горизонтальном направлении

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_0 \cos\beta t - \frac{gt^2}{2}; \\ x_2 &= v_0 \cos(\beta + 2\alpha)t - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

В моменты времени $t = T_1$ и $t = T_2$ координаты x_1 и x_2 равны нулю, т.е.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= v_0 \cos\beta t - \frac{gt^2}{2}; \\ 0 &= v_0 \cos(\beta + 2\alpha)t - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

с учётом того, что $\alpha = 45^o - \beta$, получим

$$\left.\begin{aligned} v_0 \cos\beta &= \frac{gT_1}{2}; \\ v_0 \sin\beta &= \frac{gT_2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

4. Перемножим последние соотношения

$$v_0^2 \sin\beta \cos\beta = \frac{g^2 T_1 T_2}{2}.$$

Преобразуем левую часть последнего уравнения

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g} = \frac{gT_1T_2}{2}.$$

5. Подставим значение s в уравнение радиуса лунки

$$R = \frac{s}{2\cos 45^o} = \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{gT_1T_2}{2\sqrt{2}}.$$

1.263. Артиллерийское орудие на полигоне посылает снаряды с начальной скоростью v_0 = 800 м/с, производя выстрелы под углом α = 15^o к горизонту. На какой минимальной высоте должны летать фронтовые бомбардировщики, чтобы не быть поражёнными снарядами?

Решение

1. Минимальная высота полётов в данном случае определяется максимальным подъёмом снарядом над горизонтом

$$y_{max} = h = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt_2}{2}.$$

2. Время подъёма снаряда в верхнюю точку траектории найдём по вертикальной составляющей скорости снаряда

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

в верхней точке траектории $v_y = 0$, поэтому:

$$v_0 \sin\alpha - gt = 0; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{6{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}067}{20} \cong 2144\,\text{м}.$$

1.264. Для тела, брошенного с поверхности земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, построить графики зависимости вертикальной проекции скорости тела v_y в зависимости от времени и координаты x, т.е. расстояния от точки бросания.

Решение

1. Вертикальная составляющая скорости как функция времени определяется уравнением

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt ,$$

из которого следует, что начальная и конечная скорости по модулю будут одинаковы

$$v_y = \pm v_0 \sin\alpha ;$$

в верхней точке траектории вертикальная составляющая равна нулю, в энном легко убедится подставив в исходное уравнение соответствующие времена полёта

$$v_0 \sin\alpha - gt_C = 0, \quad \Rightarrow t_C = \frac{v_0 \sin\alpha}{g};$$

$$\tau = 2t_C = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Таким образом, зависимость $v_y = f(t)$ будет представлять собой прямую, проходящую через нулевое значение при $t = t_C$ (рис. 1.264)

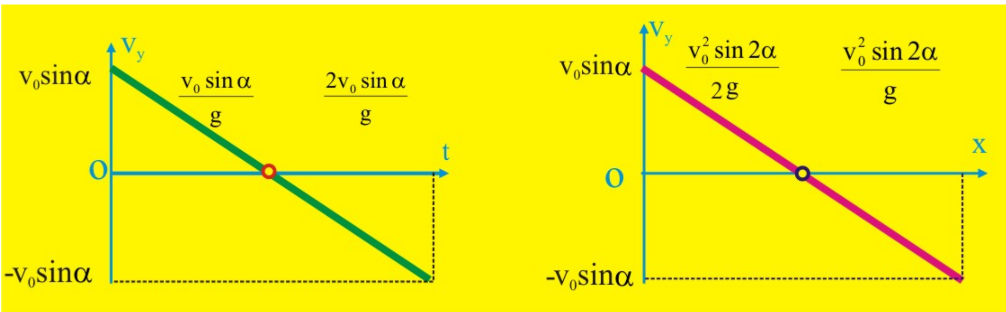

Рис. 1.264. Зависимости вертикальной составляющей скорости $v_y = f(t);\ v_y = f(x)$

2. Для получения зависимости $v_y = f(x)$ выразим время из уравнения горизонтального перемещения

$$x = v_0 \cos\alpha t; \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

и подставим это значение в уравнение вертикальной проекции скорости

$$v_y = v_0 \sin\alpha - \frac{gx}{v_0 \cos\alpha};$$

При $x = 0$ и $x = x_{max}$ величина $v_y = \pm v_0 \sin\alpha$, в верхней точке траектории при $x = \frac{x_{max}}{2}$, вертикальная составляющая скорости равна нулю.

1.265. Тело брошено с поверхности земли под углом $\alpha = 60^\circ$ с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Найти вектор перемещения, модуль перемещения, направление модуля перемещения от точки броска до ближайшей точки траектории, в которой нормальное ускорение тела будет равной $a_n = 8$ м/с^2.

Решение

1. Поскольку по условию задачи $a_n = 8$ м/с^2, а в высшей точке траектории $a_n = g$, то искомая точка будет находиться на восходящей части параболической кривой.

2. Запишем уравнение для нормальной составляющей ускорения

$$a_n = \frac{gv_x}{|\vec{v}|} = \frac{gv_0\cos\alpha}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{gv_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}},$$

$$a_n = \frac{gv_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha - 2v_0\sin\alpha gt + g^2t^2}},$$

$$a_n^2 = \frac{g^2v_0^2\cos^2\alpha}{v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha - 2gtv_0\sin\alpha + g^2t^2},$$

$$a_n^2 = \frac{g^2v_0^2\cos^2\alpha}{v_0^2 - 2gt\sin\alpha + g^2t^2},$$

3. Подставляя в уравнение нормального ускорения заданные величины придём к следующему квадратному уравнению относительно искомого времени полёта тела в точку траектории с заданной величиной нормального ускорения

$$t^2 - 1{,}72t + 0{,}7 = 0,$$

откуда

$$t = 0{,}86 + \sqrt{0{,}74 - 0{,}7} \approx 1\text{с}.$$

4. Вычислим координаты точки, куда тело прилетит за 1 с движения

$$x = v_0 t\cos\alpha = 10\ \text{м},$$

$$y = v_0\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 12{,}32\ \text{м}.$$

5. Векторное уравнение радиус-вектора

$$\vec{r} = 10\vec{i} + 12{,}32\vec{j}.$$

6. Модуль радиус-вектора

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \cong 15{,}8\ \text{м}.$$

7. Направление радиус-вектора

$$r_x = |\vec{r}|\cos\beta; \quad \beta = \arccos\frac{r_x}{|\vec{r}|} \cong 50^\circ.$$

1.266. Тело брошено под углом к горизонту, так что его радиус-вектор изменяется по закону:

$$\vec{r} = (5 + 3t)\vec{i} + (5 + 2t - 5t^2)\vec{j}.$$

Под каким углом к поверхности земли брошено тело?

Решение

1. Запишем уравнение проекций радиус-вектора на оси координат

$$\left.\begin{aligned} r_x &= 5 + 3t; \\ r_y &= 5 + 2t - 5t^2; \end{aligned}\right\}$$

2. Проекции скорости на оси координат

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dr_x}{dt} = 3\frac{\text{м}}{\text{с}}; \\ v_y &= \frac{dr_y}{dt} = 2 - 10t; \end{aligned}\right\}$$

Для начального момента времени

$$\left.\begin{aligned} v_{x(0)} &= \frac{dr_x}{dt} = 3\frac{\text{м}}{\text{с}}; \\ v_{y(0)} &= \frac{dr_y}{dt} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}; \end{aligned}\right\}$$

3. Угол, под которым бросили тело

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_{y(0)}}{v_{x(0)}} \cong 33{,}7^{o}.$$

1.267. Сферический резервуар, стоящий на поверхности земли имеет радиус R. При какой минимальной скорости, брошенный с поверхности камень, перелетит резервуар, только коснувшись его вершины. Сопротивление движению со стороны воздуха отсутствует.

Решение

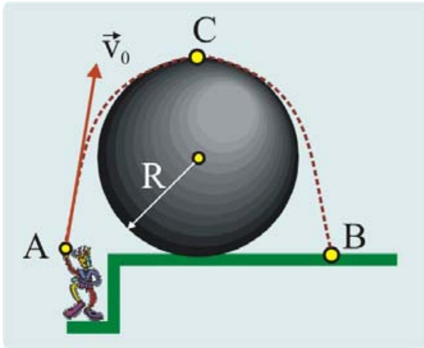

Рис. 1.267. Бросок через резервуар

1. Естественно предположить, что камень нужно бросать под углом к горизонту, т.е. камень полетит, удовлетворяя уравнениям

$$v_x = v\cos\alpha; \quad v_y = v\sin\alpha + gt;$$

$$x = vt\cos\alpha; \quad y = vt\sin\alpha - gt^2/2.$$

2. Используя уравнение для проекции скорости на вертикальную ось, определим время подъёма камня t_1 на высоту 2R

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt;$$

$$v_{yC} = 0; \quad t_1 = \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

2. Максимальная высота подъёма камня по вертикальной оси должна быть равна

$$y_{max} = 2R,$$

$$y_{max} = 2R = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}.$$

3. Определим из последнего уравнения значение начальной скорости броска

$$v_0 = \sqrt{\frac{4gR}{\sin^2\alpha}}.$$

4. Угол, под которым следует бросать камень, определим из условия

$$y_{max} = x_{max} \approx 2R,$$

$$x_{max} = v_0\cos\alpha t_1 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{g};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2; \quad \alpha = \operatorname{arctg}2 \cong 63^0.$$

5. Подставим далее значение угла α в уравнение для v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{4Rg}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4Rg}{\sin^2 63^0}} \cong \sqrt{5Rg}.$$

1.268. При какой минимальной скорости можно перебросить камень через дом с покатой крышей? Ближайшая стена имеет высоту H, дальняя стена – высоту h, ширина дома L.

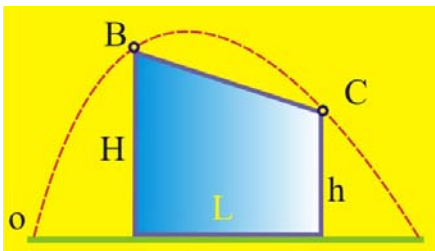

Рис. 1.268. Бросок через дом

Решение

1. Запишем уравнения полёта тела из точки B в точку C (рис. 1.268)

$$L = vt\cos\alpha; \quad 0 = (H - h) + v\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

2. Выразим из первого уравнения время

$$t = \frac{L}{v\cos\alpha},$$

и подставим это значение во второе уравнение

$$0 = (H-h) + v\sin\alpha\frac{L}{v\cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{L^2}{v^2\cos^2\alpha}\right) »$$

$$(H-h) + Ltg\alpha - \frac{gL^2}{2v^2\cos^2\alpha} = 0,$$

преобразуем полученное соотношение в квадратное уравнение относительно $tg\alpha$

$$\frac{gL^2}{2v^2}tg^2\alpha - Ltg\alpha + \frac{gL^2}{2v^2} - (H-h) = 0.$$

3. Выделим дискриминант уравнения и приравняем его к нулю с целью определения минимального значения скорости в точке B траектории

$$D = L^2 - \frac{gL^2}{2v^2}\left\{\frac{gL^2}{2v^2} - (H-h)\right\} = 0$$

$$v^2_{B(min)} = g\left\{\sqrt{(H-h)^2 + L^2} - (H-h)\right\}.$$

4. Минимальную скорость броска определим из условия

$$v^2_{min} = v^2_{B(min)} + 2gH,$$

откуда

$$v_{min} = \sqrt{g\left(H + h + \sqrt{(H-h)^2 + L^2}\right)}.$$

1.269. Миномёт установлен под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту на крыше здания высотой $h = 40$ м. Начальная скорость мины $v_0 = 50$ м/с. Записать уравнения движения мины и найти уравнение траектории. Определить время полёта мины. Найти максимальную высоту подъёма мины над горизонтом H. Какова будет максимальная дальность полёта мины?

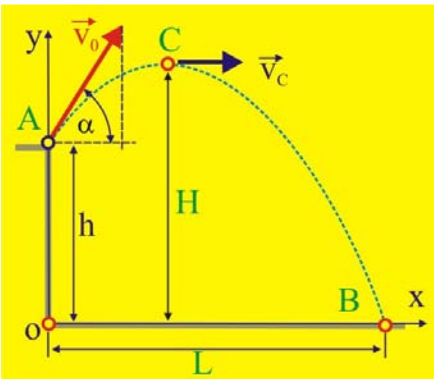

Рис. 1.269. Миномёт на крыше

Решение

1. Уравнения движения мины

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\alpha; \\ y &= h + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

2. Вид траектории определим выразив из первого уравнения системы время, и подставим его значение во второе уравнение

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha};$$

$$y = h + v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha},$$

$$y = h + xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

3. Время полёта мины определим приравняв уравнение вертикальной координаты к нулю

$$h + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0; \quad \Rightarrow \quad t^2 - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}t - \frac{2h}{g} = 0,$$

с учётом заданных значений величин

$$t^2 - 8{,}7t - 8 = 0; \quad \Rightarrow \quad t \cong 4{,}35 + \sqrt{19 + 8} \cong 9{,}55\ \text{с}.$$

4. Максимальная высота подъёма мины над горизонтом

$$H = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \cong 134\ \text{м}.$$

4. Дальность полёта мины

$$L = v_0 \cos\alpha t \cong 234\ \text{м}.$$

1.270. С высоты h = 5 м над поверхностью земли с начальной скоростью v_0 = 20 м/с брошен мяч под углом α = 30° к горизонту. Найти модуль и направление вектора средней скорости мяча за всё время полёта.

Решение

1. Максимальная дальность полёта мяча

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{400 \cdot 0{,}866}{10} = 34{,}6\ \text{м}$$

2. Модуль вектора перемещения

$$|\vec{r}| = \sqrt{L^2 + h^2} = \sqrt{1200 + 25} = 35\ \text{м}.$$

3. Время полёта мяча

$$L = v_0 \cos\alpha\tau; \quad \tau = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = 2\ \text{с}.$$

4. Модуль средней скорости

$$|<\vec{v}>| = \frac{|\vec{r}|}{\tau} = 17{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. Направление вектора средней скорости

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{h}{L} \cong 8^\circ.$$

1.271. С вершины горы бросают камень под углом α = 30° к горизонту. Определить начальную скорость камня, если он упал на расстоянии L = 20 м от точки броска. Угол наклона горы к горизонту β = α = 30°.

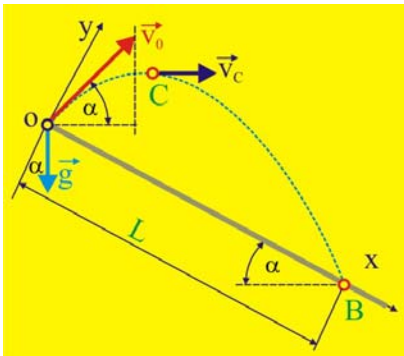

Рис. 1.271. Бросок со склона

Решение

1. Запишем уравнения движения камня в общем виде

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x(0)}t + \frac{a_x t^2}{2}; \\ y &= y_0 + v_{y(0)}t + \frac{a_y t^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{x(0)} + a_x t; \\ v_y &= v_{y(0)} + a_y t; \end{aligned}\right\}$$

2. Перепишем уравнения с учётом конкретных условий полёта (рис. 1.271)

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad a_x = g_x = g\sin\alpha; \quad a_y = g_y = -g\cos\alpha;$$

$$v_{x(0)} = v_0\cos(90^0 - \alpha) = v_0\cos 60^\circ = 0{,}5v_0; \quad v_{y(0)} = v_0 \sin 60^\circ = 0{,}87v_0;$$

3. Перепишем кинематические уравнения с учётом заданных величин

$$x = 0{,}5v_0t + \frac{g\sin\alpha}{2}t^2; \quad y = 0{,}87v_0t - \frac{g\cos\alpha}{2}t^2;$$

$$v_x = 0{,}5v_0 + (g\cos\alpha)t; \quad v_y = 0{,}87v_0 - (g\sin\alpha)t;$$

С учётом значения заданных углов

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}5v_0t + 2{,}5t^2; \\ y &= 0{,}87v_0t - 4{,}3t^2; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} v_x &= 0{,}5v_0 + 8{,}7t; \\ v_y &= 0{,}87v_0 - 5t; \end{aligned}\right\}$$

4. Время полёта камня найдём из условия равенства нулю вертикальной координаты

$$0 = 0{,}87v_0t - 4{,}3t^2; \quad \tau = 0{,}2v_0.$$

5. Заданная дальность полёта может быть выражена следующим образом

$$L = 0{,}5v_0\tau + 2{,}5\tau^2 = 0{,}1v_0^2 + 0{,}1v_0^2 = 0{,}2v_0^2.$$

6. Начальная скорость камня

$$v_0 = \sqrt{\frac{L}{0{,}2}} \cong 10\frac{м}{с}.$$

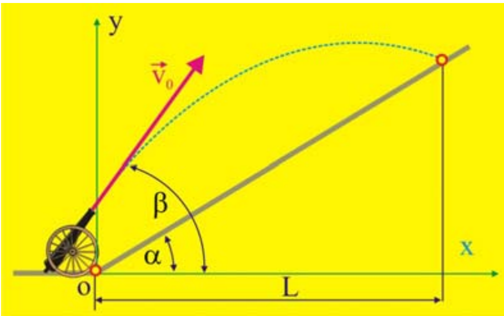

Рис. 1.272. Обстрел склона горы

1.272. Из орудия ведут обстрел склона горы. На каком расстоянии ℓ от миномёта будут падать снаряды, если их начальная скорость v_0, а наклон горы к горизонту составляет угол α? Угол стрельбы относительно горизонта β ($\beta > \alpha$).

Решение

1. В выбранной системе отсчёта (рис. 1.272) уравнения движения снаряда могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0t\cos\beta; \\ y &= v_0t\sin\beta - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Подставим в уравнения координаты цели x = L; L = tgα

$$\left.\begin{aligned} L &= v_0t\cos\beta; \\ L\mathrm{tg}\alpha &= v_0t\sin\beta - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

3. Выразим из первого уравнения последней системы уравнений время и подставим его значение во второе уравнение

$$t = \frac{L}{v_0\cos\beta}; \quad L\mathrm{tg}\alpha = v_0\frac{L}{v_0\cos\beta}\sin\beta - \frac{g}{2}\frac{L^2}{v_0^2\cos^2\beta}.$$

4. Разрешим полученное уравнение относительно скорости

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}}.$$

5. Дальность полёта снаряда *l* вдоль склона

$$\ell = \frac{L}{\cos\alpha}.$$

6. Уравнение скорости перепишется в виде

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\ell\cos^2\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}},$$

откуда

$$\ell = \frac{2v_0^2 \cos\sin(\beta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}.$$

1.273. Мотоциклисту необходимо перепрыгнуть ров шириной s. Точка приземления B (рис. 1.274) находится ниже точки старта o на расстоянии h. Подъездная дорога наклонена под углом α к горизонту. С какой минимальной скоростью должен стартовать мотоцикл, чтобы гарантированно перелететь ров?

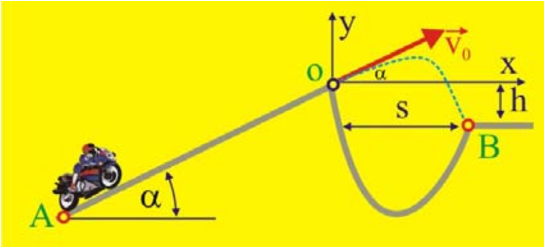

Рис. 1.273. Прыжок мотоцикла через ров

Решение

1. Запишем уравнения движения мотоциклиста, как частицы, брошенной под углом к горизонту

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\alpha; \\ y &= v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Минимальная скорость мотоцикла может быть найдена из условия непременного прохождения им точки B с координатами (рис. 1.273) x = s, y = – h, т.е.

$$\left.\begin{aligned} s &= v_0 t\cos\alpha; \\ -h &= v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

3. По аналогии с предыдущей задачей выразим из первого уравнения системы время и подставим это значение во второе уравнение

$$t = \frac{s}{v_0\cos\alpha}; \quad -h = s\,tg\alpha - \frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

4. Из последнего уравнения видно, что

$$v_{0(min)} = \frac{s}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(s\,tg\alpha + h)}}.$$

1.274. Упругий шарик с высоты h = 2 м свободно падает на наклонную плоскость с высоты h = 2 м и упруго отскакивает от плоскости. На каком расстоянии s от места падения шарик ударится о плоскость после второго отскока, если плоскость наклонена к горизонту на угол $\alpha = 30^o$?

Решение

1. Начальная скорость шарика после упругого отскока будет равна по величине

$$v_0 = \sqrt{2gh},$$

и с осью оу составит угол α (рис. 1.274).

2. Определим время полёта шарика из точки о в точку А, для чего воспользуемся уравнением движения по вертикальной координате

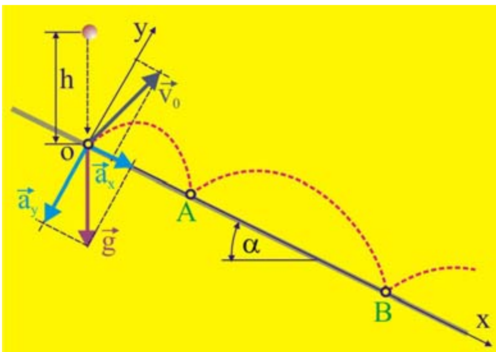

Рис. 1. 274. Шарик на наклонной плоскости

$$y = v_{y(0)}t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0\cos\alpha t - \frac{g\cos\alpha t^2}{2},$$

в точке А вертикальная координата y = 0, поэтому

$$v_0\cos\alpha t-\frac{g\cos\alpha t^2}{2}=0,$$

или

$$2v_0=gt;\quad t=\frac{2v_0}{g}=\frac{2\sqrt{2gh}}{g}.$$

3. Время полёта шарика между точками о и А не зависит от наклона плоскости, это время будет одинаковым для всех последующих отскоков. Собственно это и определяет одинаковость расстояний между отскоками. Начальная скорость после отскока будет так же неизменной. Расстояние между началом системы отсчёта и вторым отскоком (точка В) определим из уравнения горизонтальной координаты

$$x=v_{x(0)}t+\frac{a_x t^2}{2}=v_0\sin\alpha t+\frac{g\sin\alpha t^2}{2},$$

подставим в полученное уравнение значение времени t

$$s=\left\{v_0\frac{2v_0}{g}+\frac{g}{2}\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2\right\}\sin\alpha=\frac{4v_0^2}{g}\sin\alpha=\frac{4\cdot 2gh}{g}\sin\alpha=8h\sin\alpha=8\text{ м}.$$

1.275. Теннисный мяч падает вертикально с высоты h = 1 м на наклонную доску. Расстояние между точками первого и второго удара равно s = 4 м. Считая взаимодействие мяча и доски протекающим по абсолютно упругой схеме, определить угол наклона доски к горизонту.

Решение

1. Воспользуемся конечным уравнением предыдущей задачи

$$s=8h\sin\alpha,$$

которое позволяет определить искомый угол наклона доски

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{s}{8h}\right)=\arcsin 0{,}5=30^{o}.$$

1.276. Фронтовой бомбардировщик пикирует по прямой, составляющий угол α = 45^0 с горизонтом. В целях безопасности экипажа бомбы должны покидать самолёт на минимальной высоте полёта 1000 м. На каком расстоянии от цели необходимо начать бомбометание при скорости пикирования 850 км/час?

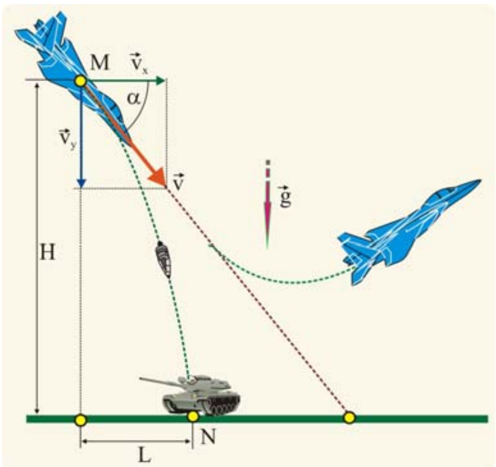

Рис. 1.276. Бомбометание при пикировании

Решение

1. В начальный момент времени сбрасываемая бомба имеет скорость бомбардировщика, которую можно представить двумя составляющими. Вертикальная составляющая характеризует свободное падение бомбы до поверхности земли, горизонтальная составляющая скорости постоянна по модулю и определяет перемещение вдоль оси Ох.

2. Запишем кинематические уравнения, определяющие движение бомбы

$$v_x=v\cos\alpha;\quad v_y=v\sin\alpha+gt;$$

$$x=vt\cos\alpha;\quad y=vt\sin\alpha+\frac{gt^2}{2}.$$

3. Из четвёртого уравнения системы определим время полёта бомбы до цели t_1

$$H = vt_1\sin\alpha + \frac{gt_1^2}{2}; \Rightarrow t^2 + \frac{v\sin\alpha}{g}t_1 - \frac{2H}{g} = 0.$$

$$t_1 = -\frac{v\sin\alpha}{2g} + \sqrt{\frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2H}{g}}.$$

4. Третье уравнение системы даёт возможность определить искомое расстояние L

$$L = vt_1\cos\alpha = \frac{v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gH}{v^2\sin^2\alpha}} - 1\right) \cong 1335\text{м}.$$

1.277. Между сдвоенными шинами грузового автомобиля застрял камень на расстоянии 0,8 R от центра колеса радиусом R = 1м. При скорости автомобиля 72 км/час камень покидает колесо. На каком минимальном расстоянии от грузовика должен двигаться легковой автомобиль, чтобы в него камень не попал?

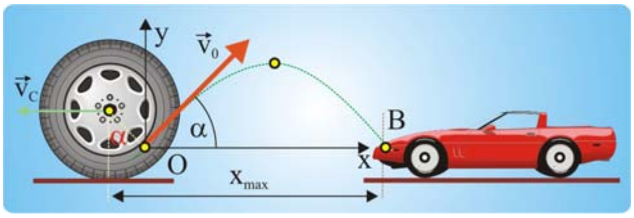

Рис. 1.277. Полёт камня из колёс грузовика

Решение

1. Камень будем считать телом, брошенным под углом α к горизонту, причём наиболее далеко булыжник полетит, когда этот угол будет составлять α = 45^0 к горизонту, потому что

$$x_{max} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

2. Линейная скорость камня в начальной точке его полёта определится как

$$v_0 = \frac{v_c}{R}0{,}8R = 0{,}8v_c = 16\text{м/с}.$$

3. Безопасное расстояние до легкового автомобиля в этом случае будет равно

$$x_{min} = \frac{16^2}{10} = 25{,}6\text{м}.$$

1.278. С вершины обрыва, находящейся на высоте h над горизонтом бросают небольшой предмет, который падает на горизонтальную поверхность, расположенную под обрывом на удалении L от точки броска (рис. 1.278). Чему равна минимальная начальная скорость броска ?

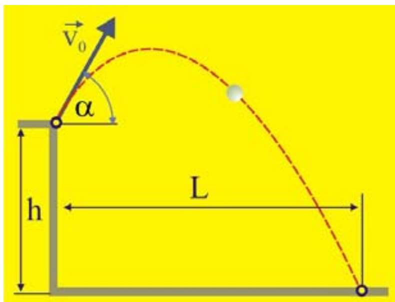

Рис. 1.278. Бросок с обрыва в цель

Решение

1. Если бросок совершается с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, то уравнения движения предмета можно представить следующим образом

$$\left.\begin{aligned} &L = v_0 t\cos\alpha; \\ &0 = h + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразив из первого уравнения время и подставив его значение во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно tgα (см. решение задачи 1.268)

$$\frac{gL^2}{2v_0^2}\text{tg}^2\alpha - L\text{tg}\alpha + \frac{gL^2}{2v_0^2} - h = 0.$$

3. Выделим дискриминант этого уравнения и приравняем его к нулю, что позволит определить минимальное значение скорости

$$D = b^2 - 4ac = L^2 - 4\frac{gL^2}{2v_0^2}\left(\frac{gL^2}{2v_0^2} - h\right) = 0.$$

$$1 - \frac{2g}{v_{0(\min)}^2}\left(\frac{gL^2}{2v_{0(\min)}^2} - h\right) = 0; \quad 1 - \frac{g^2L^2}{v_{0(\min)}^4} - \frac{2gh}{v_{0(\min)}^2} = 0; \quad 1 - \frac{g^2L^2 - 2v_{0(\min)}^2 gh}{v_{0(\min)}^4} = 0,$$

$$v_{0(\min)} = \sqrt{g(\sqrt{L^2 + h^2} - h)}.$$

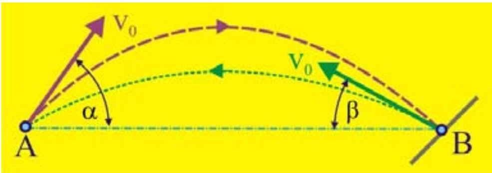

Рис. 1.279. Бросок и отражение

1.279. Из точки А под углом α к горизонту брошен шарик в точку В, где он отскочил от наклонной гладкой пластинки и полетел в обратную сторону, затратив на обратный полёт в $k = \sqrt{3}$ меньшее время. Найти угол α, под которым было брошено тело из точки А.

Решение

1. Дальность броска на расстояние L определяется уравнением

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

время полёта при этом составит

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

2. При упругом отскоке шарика модуль скорости не изменяется, а расстояние остаётся прежним, поэтому можно записать следующее равенство

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g},$$

из которого следует, что:

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta; \quad \text{при} \quad \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \beta < \frac{\pi}{2},$$

уравнение справедливо при двух значениях корней

$$\alpha = \beta; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

3. Условию задачи удовлетворяет второй корень, следовательно

$$\sin\beta = \cos\alpha.$$

4. Для времён полёта в прямом и обратном направлении можно записать следующее соотношение

$$\frac{2v_0 \sin\beta}{g} = \sqrt{3}\frac{2v_0 \cos\alpha}{g}; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^{\circ}.$$

1.280. С какой скоростью v_0 должен вылететь снаряд из пушки в момент старта ракеты (рис. 1280) чтобы её поразить? Ракета стартует вертикально с ускорением a = 4 м/с^2. Расстояние от пушки до ракетного старта, находящемся на одном горизонтальном уровне, составляет $L = 9\cdot 10^3$ м. Стрельба ведётся под углом $\alpha = 45^{\circ}$ к горизонту.

Решение

1. Запишем кинематические уравнения движения снаряда и ракеты

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_0\tau\cos\alpha; \\ y_1 &= v_0\tau\sin\alpha - \frac{g\tau^2}{2}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= L; \\ y_2 &= \frac{a\tau^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Поражение цели в момент времени τ происходит при совпадении координат снаряда и ракеты

$$x_1 = x_2; \quad y_1 = y_2 .$$

3. Уравнения движения на этом основании можно переписать следующим образом

$$\left.\begin{aligned} L &= v_0\tau\cos\alpha; \\ \frac{a\tau^2}{2} &= v_0\tau\sin\alpha - \frac{g\tau^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

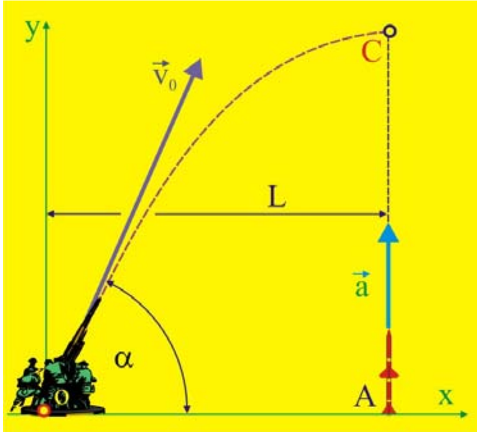

Рис. 1.280. Перехват ракеты

4. Выразим из первого уравнения время и подставим полученное значение во второе уравнение

$$\tau = \frac{L}{v_0\cos\alpha}; \quad \frac{a}{2}\frac{L^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = v_0\sin\alpha\frac{L}{v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{L^2}{v_0^2\cos^2\alpha},$$

$$\frac{aL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = Ltg\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}; \quad (a+g)\frac{L^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = Ltg\alpha;$$

$$2tg\alpha v_0^2\cos^2\alpha = (a+g)L; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{(a+g)L}{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(a+g)L}{\sin 2\alpha}};$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{(4+10)9\cdot 10^3}{\sin 90^\circ}} \cong 355\frac{м}{с}.$$

1.281. Из револьвера стреляют в вертикально подброшенный камень в тот момент, когда тот находится в наивысшей точке своего полёта на высоте h = 10 м. Под каким углом к горизонту должен держать ствол к горизонту стрелок, чтобы, находясь на расстоянии s = 50 м от точки броска камня разнести его в клочья? С какой начальной скоростью пуля должна покинуть ствол?

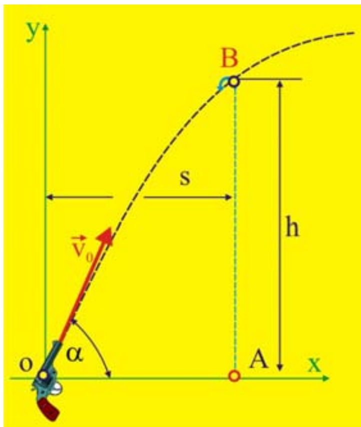

Рис. 1.281. Выстрел в камень

Решение

1. Время от выстрела до встречи с камнем

$$\tau = \frac{s}{v_0\cos\alpha}.$$

2. Уравнение высоты подъёма снаряда над горизонтом позволяет определить угол наклона ствола α

$$h = v_0\tau\sin\alpha = v_0\sin\alpha\frac{s}{v_0\cos\alpha}; \quad h = stg\varepsilon; \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\frac{h}{s} \cong 11{,}3^\circ$$

3. Дальность выстрела на расстояние s определяется как

$$s = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{gs}{\sin\alpha}} \cong 36{,}1\frac{м}{с}.$$

1.282. Модель планера летит горизонтально с постоянной скоростью u_0. В модель бросают камень с начальной скоростью v_0, направленной точно на планер под углом α к горизонту. На какой высоте h летел планер, если камень достиг своей цели?

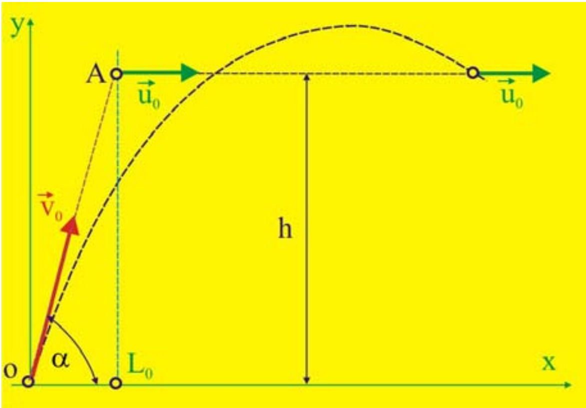

Рис. 1.282. Бросок камня в модель планера

Решение

1. В выбранной системе координат (рис. 1.282) уравнения движения планера запишутся следующим образом

$$x_1 = L_0 + u_0 t; \quad y_1 = h$$

2. Величину L_0 определим из тригонометрических соображений, воспользовавшись прямоугольным треугольником oAL_0

$$L_0 = h\,\mathrm{ctg}\alpha,$$

где L_0 – горизонтальная координата планера в момент броска камня.

3. Уравнения движения камня

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= v_0 t\cos\alpha; \\ y_2 &= v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

4. Условия попадания камня в модель планера

$$x_1 = x_2; \quad y_1 = y_2.$$

5. Перепишем уравнения движения камня исходя из необходимости попадания

$$(ox) \quad h\,\mathrm{ctg}\alpha + u_0 t = v_0 t\cos\alpha;$$

$$(oy) \quad h = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

6. Выразим из уравнения горизонтальной координаты время

$$t = \frac{h\,\mathrm{ctg}\alpha}{v_0\cos\alpha - u_0},$$

и подставим это значение в уравнение вертикальной координаты камня

$$h\left(\frac{v_0\cos\alpha}{v_0\cos\alpha - 1} - \frac{gh\,\mathrm{ctg}^2\alpha}{2(v_0\cos\alpha - u_0)^2}\right) = 0,$$

откуда

$$h = \frac{2u_0(v_0\cos\alpha - u_0)}{g}\mathrm{tg}^2\alpha.$$

1.283. Из артиллерийского оружия выстрелили последовательно два снаряда с одинаковой начальной скоростью v_0 = 250 м/с. Первый снаряд под углом α_1 = 60° к горизонту, второй – под углом α_2 = 45°. Определить интервал времени между выстрелами, при котором снаряды могут столкнуться друг с другом.

Решение

1. Запишем уравнения движения снарядов

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_0 t_1\cos\alpha_1; \\ y_1 &= v_0 t_1\sin\alpha_1 - \frac{gt_1^2}{2}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= v_0 t_2\cos\alpha_2; \\ y_2 &= v_0 t_2\sin\alpha_2 - \frac{gt_2^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

2. Из уравнений горизонтальных движений снарядов найдём время их движения до встречи с учётом того, что при встрече $x_1 = x_2 = x$; $y_1 = y_2 = y$

$$t_1 = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_1}; \qquad t_2 = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_2}.$$

3. Подставим найденные времена в уравнения вертикальных координат снарядов и приравняем их

$$v_0 \sin\alpha_1 \frac{x}{v_0 \cos\alpha_1} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha_1} = v_0 \sin\alpha_2 \frac{x}{v_0 \cos\alpha_2} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha_2},$$

$$(\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2) = \frac{gx}{2v_0^2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha_1} - \frac{1}{\cos^2\alpha_2}\right).$$

4. Определим из последнего уравнения горизонтальную координату встречи

$$x = \frac{2v_0^2(\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2)}{g\left(\frac{1}{\cos^2\alpha_1} - \frac{1}{\cos^2\alpha_2}\right)} = \frac{2\cdot 6{,}25\cdot 10^4(1{,}732-1)}{10(4-2)} \cong 4575 \text{ м}.$$

5. Времена полёта снарядов до встречи

$$t_1 = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_1} \cong 36{,}6 \text{ с}; \qquad t_2 = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_2} \cong 25{,}88 \text{ с}.$$

6. Максимальный интервал между выстрелами

$$\Delta t = t_1 - t_2 \cong 11 \text{ с}.$$

---

1. 284. Некто, из пионэров, бросил мяч вверх с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с. Одновременно, второй подросток, стоявший на расстоянии $L = 5$ м от пионэра, бросил камень со скоростью $v = 2\,v_0$, стараясь, ввиду природных хулиганских наклонностей, попасть в мяч (рис. 1.284). Под каким углом к горизонту α нужно бросить камень, чтобы он нарушил полёт мяча? В какой момент времени это событие наиболее вероятно?

Решение

1. Запишем уравнения вертикального перемещения мяча и камня

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= v_0 t - \frac{gt^2}{2}; \\ y_2 &= 2v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

2. Время полёта камня до встречи с мячом

$$\tau = \frac{L}{2v_0\cos\alpha}.$$

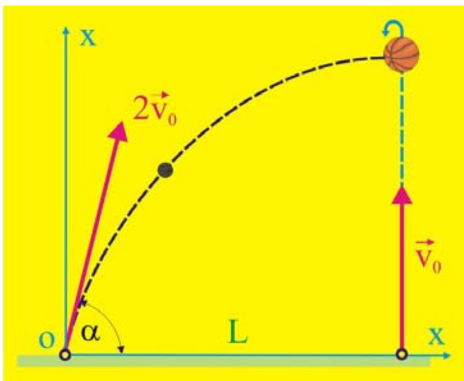

Рис. 1.284. Мяч и камень

3. Подставим уравнение времени в уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= v_0\frac{L}{2v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{L^2}{4v_0^2\cos^2\alpha}; \\ y_2 &= 2v_0\sin\alpha\frac{L}{2v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{L^2}{4v_0^2\cos^2\alpha}; \end{aligned}\right\}$$

4. Момент встречи камня с мячом происходит при равенстве их вертикальных координат $y_1 = y_2$, что даёт основание уравнения координат мяча и камня приравнять и найти необходимый угол броска камня

$$\frac{L}{2\cos\alpha} - \frac{gL^2}{4v_0^2\cos^2\alpha} = L\mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{4v_0^2\cos^2\alpha},$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{2\cos\alpha};\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha};\quad \sin\alpha = \frac{1}{2};\quad \Rightarrow\quad \alpha = 30^{\circ}$$

5. Подставим значение найденного угла в уравнение времени

$$\tau = \frac{L}{2v_0\cos\alpha} = \frac{5}{10\cdot 0{,}866} \cong 0{,}58\ \text{c}.$$

1.285. Миномёт установлен на дне оврага глубиной h. Мина со скоростью v_0 под углом α покидает ствол. Какова горизонтальная дальность стрельбы s и максимальная величина подъёма мины над уровнем земли?

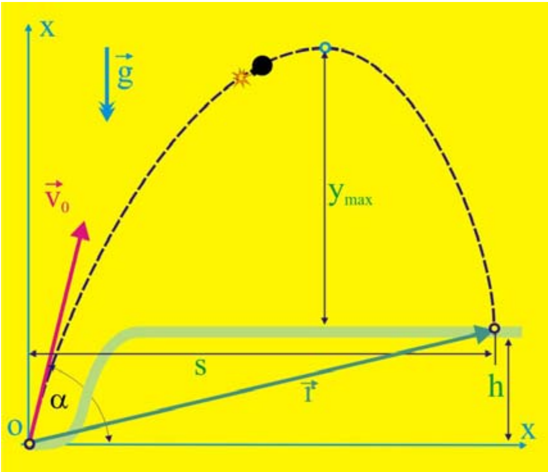

Рис. 1.285. Миномёт в овраге

Решение

1. Построим радиус-вектор конечной точки движения мины и найдём проекции модуля этого вектора, т.е. запишем, по сути, уравнения движения мины

$$\left.\begin{aligned} r_x &\equiv \Delta x = v_0 t\cos\alpha; \\ r_y &\equiv \Delta y = h = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

2. Исключим из системы уравнений время, и перепишем, исходя из заданных по условию задачи геометрических величин: $\Delta y = h;\ \Delta x = s$

$$h = s\,\text{tg}\alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

3. Разрешим последнее уравнение относительно s

$$s^2\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right) - s\,\text{tg}\alpha + h = 0;\quad s^2 - s\frac{\text{tg}\alpha\, 2v_0^2\cos^2\alpha}{g} + \frac{h2v_0^2\cos^2\alpha}{g} = 0$$

$$s = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\,\text{tg}\alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^4\cos^4\alpha\,\text{tg}^2\alpha}{g^2} - \frac{2v_0^2 h\cos^2\alpha}{g}};$$

$$s = \text{tg}\alpha + \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} - h}$$

4. Время подъёма мины в верхнюю точку траектории

$$\tau = \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

5. Максимальный подъём над горизонтом

$$y_{max} + h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g^2},$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} - h.$$

1.286. На некоторой высоте одновременно из одной точки в разных направлениях выбрасываются материальные частицы. Какую фигуру образует геометрическое место точек нахождения частиц в любой момент времени?

Решение

1. Поскольку источник выбрасывает материальные точки (частицы) во всех направлениях, то целесообразно подвижную систему отсчёта совместить с частицей из-

начально падающей с ускорением g вертикально вниз. Относительно этого тела все частицы будут удаляться по всем возможным направлениям с постоянной скоростью v.

2. Если сделать фотографию частиц, то все они будут расположены в пределах сферы с радиусом

$$R = vt\,.$$

3. Мгновенный центр сферы будет располагаться ниже источника частиц на Расстоянии

$$y_C = \frac{gt^2}{2}\,.$$

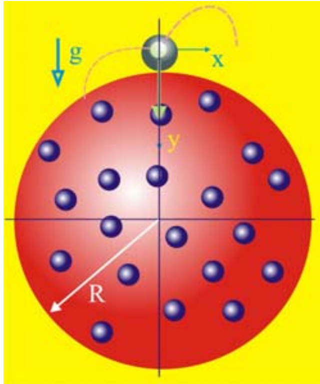

Рис. 1.286. Выброс шариков

1.287. Спортсмен прыгает с вышки высотой H = 10 м. Известно, что за τ = 2 с спортсмен достигает воды, удалившись по горизонтали от точки старта на 3 м. Определить скорость физкультурника в момент старта и в момент погружения в воду.

Решение

1. Запишем кинематические уравнения для момента времени τ, соответствующего входу спортсмену в воду (рис. 1.287)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_0\tau\cos\alpha; \\ y_1 &= -v_0\tau\sin\alpha + \frac{g\tau^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

2. Подставим в уравнения: $x_1 = L$, $y_1 = H$

$$\left.\begin{aligned} L &= v_0\tau\cos\alpha; \\ H &= -v_0\tau\sin\alpha + \frac{g\tau^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

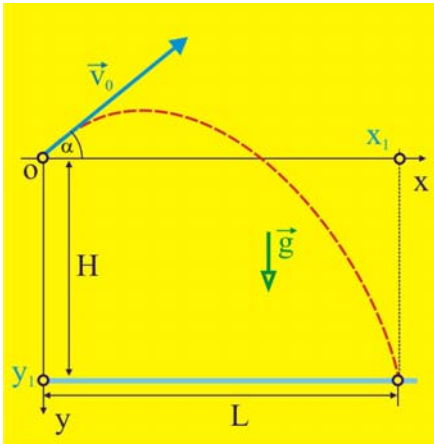

Рис. 1.287. Прыжок с вышки в воду

3. Перепишем уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{L}{\tau} &= v_0\cos\alpha; \\ \frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau} &= v_0\sin\alpha. \end{aligned}\right\}$$

4. Возведём уравнения в квадрат и сложим почленно

$$\left(\frac{L}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau}\right)^2 = v_0^2\sin^2\alpha + v_0^2\cos^2\alpha = v_0^2,$$

откуда определится начальная скорость прыжка v_0

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{L}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{10\cdot 2}{2} - \frac{10}{2}\right)^2} \cong 5{,}22\,\frac{м}{с}\,.$$

5. Модуль конечной скорости прыгуна $|\vec{v}_1|$

$$\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\alpha; \\ v_y &= -v_0\sin\alpha + g\tau; \end{aligned} \qquad |\vec{v}_1| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{\left(\frac{L}{\tau}\right)^2 + \left\{g\tau - \left(\frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau}\right)\right\}^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{H}{\tau} + \frac{g\tau}{2}\right)^2} \cong 15{,}1\,\frac{м}{с}$$

1.288. Камень брошен с вышки горизонтально с начальной скоростью. Когда камень опустился по вертикали на h = 20 м, его скорость оказалась направленной под углом α = 45° к горизонту. Определить начальную скорость камня.

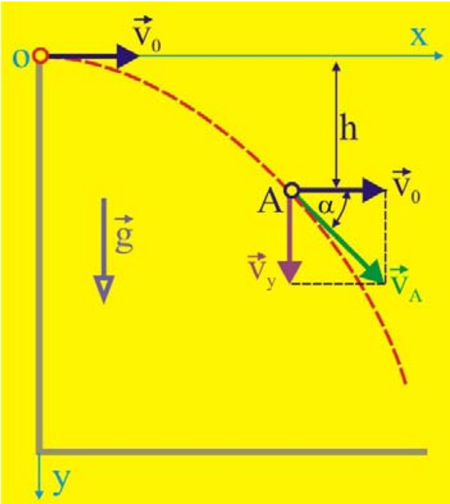

Рис. 1.288. Горизонтальный полёт

Решение

1. Запишем уравнение вертикальной координаты падающего тела (рис. 1.288)

$$y = h = \frac{gt^2}{2}; \quad v_y = v_0 = gt,$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad v_0 = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

2. По условию задачи в некой точке А, отстоящей от первоначального уровня на расстоянии h, вектор скорости составляет с горизонтом угол α = 45°, что предполагает равенство проекций скорости $\vec{v}_A$. Рассматривая прямоугольный треугольник построенный на проекциях скорости тела в точке А, можно определить искомую величину следующим образом:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\mathrm{tg}\alpha} = 20\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

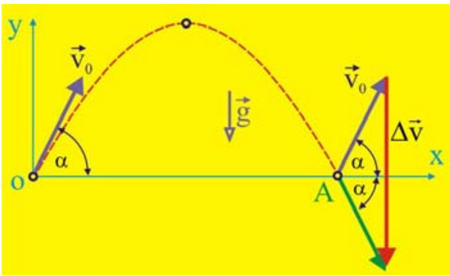

Рис. 1.289. Изменение скорости

1.289. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти изменение вектора скорости тела $\Delta\vec{v}$ за всё время полёта.

Решение

1. Проекции скорости в конечной точке падения тела А

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\alpha; \\ v_y &= v_0\sin\alpha - gt; \end{aligned}\right\}$$

2. Время полёта тела, брошенного под углом к горизонту

$$\tau = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}.$$

3. Перепишем уравнения проекций с учётом значения τ

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\alpha; \\ v_y &= v_0\sin\alpha - g\frac{2v_0\sin\alpha}{g} = -v_0\sin\alpha; \end{aligned}\right\}$$

4. Модуль конечной скорости

$$|\vec{v}_A| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0,$$

т.е. модули конечной и начальной скорости одинаковы, причём их направление таково, что

$$\Delta|\vec{v}| \equiv \Delta v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0v_0 + v_0^2} = 0.$$

5.Из треугольника скоростей видно, что

$$|\Delta\vec{v}| = v_0\sin\alpha + v_0\sin\alpha = 2v_0\sin\alpha.$$

1.290. Мяч бросают со дна прямоугольной ямы под углом $\alpha = 60^o$ к линии горизонта с начальной скоростью v_0 = 20 м/с. Глубина ямы h = 10 м, расстояние от точки броса-ния до отвесного края ямы L = 10 м. Вылетит ли мяч из ямы?

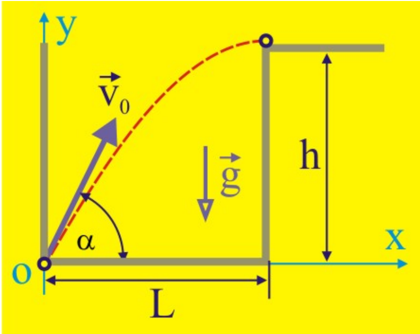

Рис. 1.290. Бросок мяча из ямы

Решение

1. Для вылета мяча из ямы должны выполняться условия:

$$y_{max} > h; \quad \frac{x_{max}}{2} = L .$$

2. Составим систему уравнений описывающих движение мяча

$$\left.\begin{aligned} L &= v_0 t\cos\alpha; \\ y &= v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

3. Выразим из первого уравнения время и подставим это значение во второе уравнение

$$t = \frac{L}{v_0\cos\alpha}; \quad y = L\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} .$$

4. Подставим в уравнение вертикальной координаты заданные по условию задачи величины

$$y = 10\cdot 1{,}732 - \frac{10\cdot 100}{2\cdot 400\cdot 0{,}25} \cong 12{,}32 \text{ м}; \quad y > h ,$$

при заданных условиях, мяч покинет пределы ямы.

1.291. Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены, так, чтобы упруго отразившись, мяч упал к ногам мальчика. Какова должна быть начальная скорость мяча v_0, если бросок производится с высоты h = 1,5 м под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту. Расстояние от точки броска до стены по горизонтали равно L = 6 м.

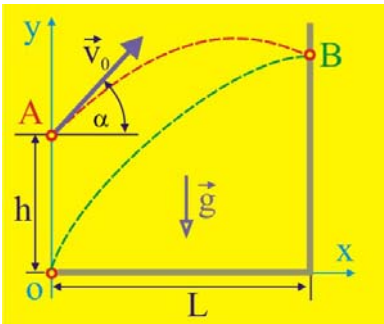

Рис. 1.291. Отражение от стены

Решение

1. Чтобы мяч упал к ногам мальчика, его отражённая траектория не должна совпадать с траекторией подлётной (рис. 1.291). При упругом взаимодействии нормальная по отношении к стене составляющая скорости не изменяя своей величины, меняет знак на обратный, тангенциальная (касательная) составляющая остаётся неизменной. В результате такого взаимодействия угол между нормалью к стене и вектором скорости мяча перед ударом оказывается равным углу между нормалью и скоростью после удара.

2. За общее время полёта τ мяч, в общей сложности пролетает по горизонтали расстояние x = 2L, при неизменности горизонтальной составляющей скорости можно записать следующее уравнение:

$$2L = v_0\tau\cos\alpha .$$

3. Время полного полёта

$$\tau = \frac{2L}{v_0\cos\alpha} .$$

4. Окончание полёта мяча характеризуется условием

$$h + v_0\sin\alpha\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0 .$$

5. Подставим в это уравнение значение τ

$$h + v_0 \sin\alpha \frac{2L}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{4L^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0;$$

$$h + 2Ltg\alpha - \frac{2L^2 g}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0; \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2Ltg\alpha}},$$

$$v_0 = \frac{6}{0{,}707}\sqrt{\frac{20}{1{,}5 + 12\cdot 1}} \cong 10{,}3\frac{м}{с}.$$

1.292. Камень брошен под углом α = 45^o к горизонту с высоты h = 2 м. Камень упал на землю на расстоянии s = 42 м по горизонтали от точки броска. С какой скоростью был брошен камень? Сколько времени τ камень провёл в полёте? Какой наибольшей высоты H камень достиг?

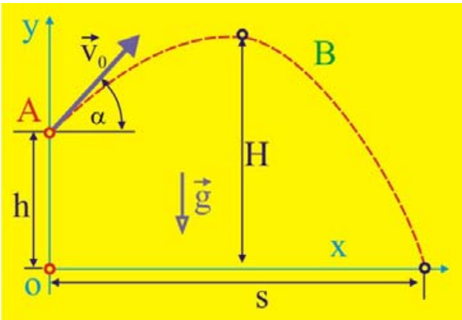

Рис. 1.292. Полёт камня с горы

Решение

1. Представим уравнения движения камня следующим образом

$$\left.\begin{aligned} s &= v_0 \tau \cos\alpha; \\ -h &= v_0 \tau \sin\alpha - \frac{g\tau^2}{2}. \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из первого уравнения время и подставим его значение во второе уравнение

$$\tau = \frac{s}{v_0 \cos\alpha}$$

$$-h = stg\alpha - \frac{g\tau^2}{2}; \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{g}(h + stg\alpha)} = \sqrt{\frac{2}{10}(2 + 42\cdot 1)} \cong 3\,с.$$

3. Подставим полученное значение времени τ в уравнение горизонтальной координаты и разрешим уравнение относительно начальной скорости

$$v_0 = \frac{s}{2\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{stg\alpha + h}} = \frac{42}{2\cdot 0{,}707}\sqrt{\frac{20}{42+2}} \cong 20\frac{м}{с}.$$

4. При известной начальной скорости максимальная высота подъёма над горизонтом H определится уравнением

$$H = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \cong 12\,м.$$

1.293. Два тела падают с одной и той же высоты H. На пути второго тела находится площадка, наклонённая под углом α = 45^o к горизонту, от которой тело упруго отражается. Как различаются времена и конечные скорости падения этих тел?

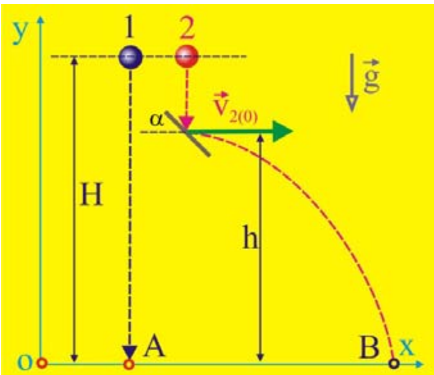

Рис. 1.293. Падение двух тел

Решение

1. При отскоке второго тела от площадки, расположенной под углом α = 45^o к горизонту (рис. 1.293) вертикальная составляющая скорости будет равна нулю, начальная скорость второго тела будет иметь чисто горизонтальное направление. Очевидно, что время падения второго

тела будет больше, после площадки его можно рассматривать, как брошенное горизонтально.

2. По условию задачи H > h, для первого тела время падения и конечная скорость определятся как:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}; \quad v_1 = \sqrt{2gH}.$$

3. Второе тело до встречи с площадкой тоже будет падать свободно

$$t_2^* = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}; \quad v_2^* = \sqrt{2g(H-h)}.$$

4. После соударения с площадкой второе тело будет падать зо поверхности в течение времени

$$t_2^{**} = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad v_2^{**} = \sqrt{2gh}.$$

5. Полное время падения второго тела определится в виде суммы

$$t_2 = t_2^* + t_2^{**} = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

6. Отношение времён падения

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1-\frac{h}{H}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} > 1,$$

в справедливости последнего уравнения легко убедиться, придав высотам определённые значения, например: H = 10 м, h = 5 м

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1-\frac{5}{10}} + \sqrt{\frac{10}{10}} \cong 1{,}707 > 1.$$

7. Конечные скорости тел будут одинаковы, действительно:

$$v_2 = v_2^* + v_2^{**} = \sqrt{2g(H-h)} + \sqrt{2gh} = \sqrt{2gH},$$

это, не вполне очевидное на первый взгляд обстоятельство обусловлено справедливостью и в этом случае закона сохранения энергии.

1.294. С балкона высотой H_0 = 7 м упал камень, который на высоте h_0 = 5 м упруго отскочил от козырька балкона, наклонённого под углом α = 45° к горизонту и полетел далее в строну припаркованного автомобиля (s_1 = 4 м, s_2 = 7 м). Упадёт ли камень на крышу автомобиля?

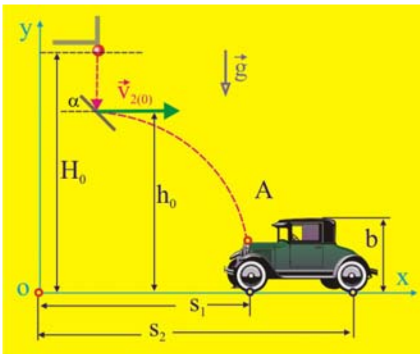

Рис. 1.294. Камень и автомобиль

Решение

1. Величина горизонтальной составляющей скорости камня после отскока от козырька

$$v_2 = \sqrt{2g(H_0 - h_0)}.$$

2. Время падения камня после отскока от карниза

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

3. Рассматривая после отскока полёт камня, как тело, брошенное горизонтально, имеем:

$$x = v_2 t = \sqrt{2g(H_0 - h_0)} \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 2\sqrt{H_0 h_0 - h_0^2} \cong 6{,}3 \text{ м},$$

учитывая высоту автомобиля, камень угодит прямо на крышу.

1.295. Небольшой прожектор подсвечивает вертикальную стену. Проходящий мимо хулиганствующий тенейджер не преминул метнуть в лампочку камень под углом α = 45^o к горизонту и попал в осветительный прибор (рис. 1.295). Найти закон движения тени камня h = f(t), считая что лампочка и точка броска находятся на одной и той же высоте h = 0, а расстояние от точки броска до лампочки равно L.

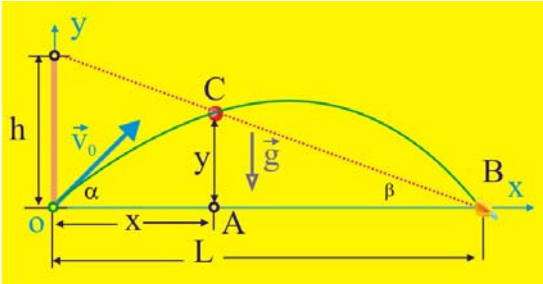

Рис. 1.295. Лампочка и хулиган

Решение

1. Бросок под углом $\alpha = 45^o$ означает, что вертикальная и горизонтальная составляющие начальной скорости будут равны по модулю

$$v_{0(x)} = v_{0(y)} = v\,.$$

2. Для произвольного момента времени справедливы уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= vt; \\ y &= vt - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

3. Приравнивая к нулю вертикальную координату, найдём время полёта камня

$$\tau = \frac{2v}{g}\,.$$

4. Факт попадания камня в лампочку соответствует следующим уравнениям

$$L = v\tau = \frac{2v^2}{g}; \quad v = \sqrt{\frac{gL}{2}}\,.$$

5. Высоту подъёма тени камня над горизонтом модно выразить через расстояние L, из рассмотрения прямоугольного треугольника ABC

$$h(t) = Ltg\beta = L\frac{y}{L-x} = L\frac{vt - \left(\frac{gt^2}{2}\right)}{L-x} = \frac{L}{v}vt\frac{v - \frac{gt^2}{2}}{L-vt} = vt\frac{v\tau - \left(\frac{g\tau}{2}\right)t}{L-vt};$$

$$h(t) = vt\frac{L-vt}{L-vt} = vt = t\sqrt{\frac{gL}{2}}\,,$$

тень камня по стене движется с постоянной скоростью.

1.296. Пушка установлена вершине холма сечение, которого в вертикальной плоскости имеет вид параболы y = ax^2(рис. 1.296). При какой минимальной скорости снаряда, вылетающего под углом α к горизонту, он никогда не упадёт на поверхность холма?

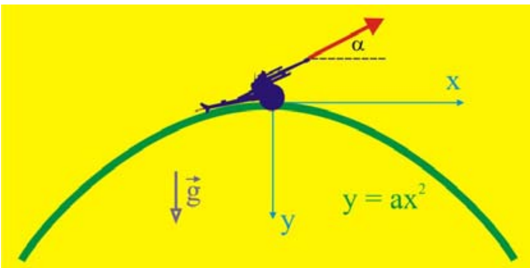

Рис. 1.296. Пушка на вершине холма

Решение

1. Запишем уравнения движения снаряда в выбранной системе координат

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\alpha; \\ y &= \frac{gt^2}{2} - v_0 t\sin\alpha; \end{aligned}\right\}$$

2. Выразив из первого уравнения время и подставив его значение во второе уравнение, придём к уравнению траектории полёта снаряда

$$y(x) = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 - xtg\alpha = ax^2\,,$$

преобразуем уравнение траектории к виду

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x - tg\alpha = ax; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} - a\right)x = tg\alpha,$$

уравнение не имеет положительных решений при

$$\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right) \le a.$$

3. Значение минимальной скорости, при которой снаряд не столкнётся с поверхностью холма, определится из условия

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} = a; \quad \Rightarrow \quad 2av_0^2\cos^2\alpha = g; \quad v_{min} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2a}}.$$

1.297. Двое, стоящие на горизонтальной площадке, на расстоянии L друг от друга одновременно бросают мячи. Второй мяч столкнулся с первым мячом, когда тот достиг верхней точки траектории. С какой скоростью, и под каким углом был брошен второй мяч, если начальная скорость первого мяча была v_1 и направлена под углом α к горизонту.

Решение

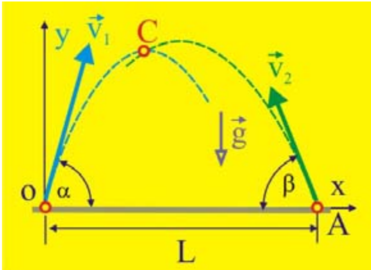

Рис. 1.297. Столкновение мячей

1. Запишем уравнение движения мячей

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_1 t\cos\alpha; \\ y_1 &= v_1 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_2 &= L - v_2 t\cos\beta; \\ y_2 &= v_2 t\sin\beta - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}\right\}.$$

2. Время подъёма первого мяча в точку C

$$\tau = \frac{v_1\sin\alpha}{g}.$$

3. В точке столкновения мячей C их горизонтальные и вертикальные координаты будут одинаковыми, т.е.

$$v_2\cos\beta = \frac{Lg}{v_1\sin\alpha} - v_1\cos\alpha;$$

$$v_2\sin\beta = v_1\sin\alpha.$$

4. Возведём уравнения в квадрат и сложим, что позволяет найти модуль скорости второго мяча

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \left(\frac{Lg}{v_1\sin\alpha}\right)^2 - 2gLctg\alpha}.$$

5. Угол β определим, разделив уравнения скоростей почленно

$$tg\beta = \frac{2v_1^2\sin^2\alpha}{2Lg - v_1^2\sin 2\alpha}; \quad \beta = arctg\left(\frac{2v_1^2\sin^2\alpha}{2Lg - v_1^2\sin 2\alpha}\right).$$

---

1. 298. По гладкой наклоненной под углом $\alpha = 45^o$ плоскости скользит стакан высотой h = 0,1 м (рис. 1.298). В момент начала движения стакана от его верхнего края роняют небольшой шарик, который упруго отскакивает от дна стакана. Какой путь проделает стакан к моменту пятого удара шарика о дно стакана?

Решение

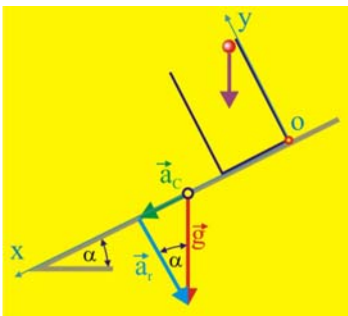

Рис. 1.298. Шарик в стакане

1. Проекции ускорения стакана при его движении вниз по плоскости

$$a_x = g\sin\alpha; \quad a_y = g\cos\alpha .$$

2. Ускорение шарика

$$a = a_y = g\cos\alpha .$$

3. Уравнение вертикального перемещения шарика внутри ускоренно движущегося стакана позволяет определить время его падения до дна

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{g\cos\alpha t^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}} .$$

4. Время к моменту девятого удара о дно

$$t_9 = 9\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}} .$$

5. Путь, пройденный стаканом за время t_9

$$s = \frac{a_x t_9^2}{2} = g\sin\alpha \cdot 81\frac{2h}{2g\cos\alpha} = 81 \cdot h \cdot tg\alpha = 81 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = 8{,}1\,м .$$

1.299. Небольшое тело скользит со скоростью v = 10 м/с по горизонтальной плоскости ,приближаясь к щели, образованной двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии d = 0,05 м друг от друга. Глубина щели H = 1 м. Определить, сколько раз ударится тело о стенки щели до падения на её дно.

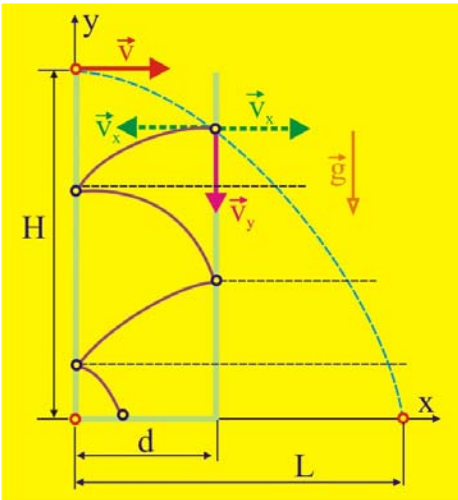

Рис. 1.299. Тело в щели

Решение

1. В горизонтальном направлении тело движется с постоянной по модулю скоростью v.

2. Вертикальная координата тела будет изменяться в соответствии с уравнением

$$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{a_y t^2}{2} = H - \frac{gt^2}{2} .$$

3. При падении тела на дно щели y(t) = 0, что позволяет определить время падения тела

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} .$$

4. За время τ тело по горизонтали проделает путь

$$L = v\tau = v\sqrt{\frac{2H}{g}} .$$

5. Расстояние L можно выразить через число столкновений тела со стенками N

$$L = dN: \quad dN = v\sqrt{\frac{2H}{g}}; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{v}{d}\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{10}{0{,}05}\sqrt{\frac{2}{10}} \cong 89 .$$

1.300. Со стола высотой h = 1,2 м сбрасывают шарик, придав ему горизонтальную скорость v_1 = 1 м/с. В момент, когда шарик совершает третий отскок от пола со стола стартует второй шарик тоже с горизонтальной скоростью, позволяющей ему столкнуться с первым шариком. На какой высоте h_C произойдёт столкновение шариков? Какова при этом должна быть скорость второго шарика, если отскоки первого шарика протекают по абсолютно упругой схеме?

Решение

1. Примем за начальный момент времени третий отскок первого шарика, т.е. момент начала движения второго шарика (рис. 1.300).

2. Абсолютно упругий отскок предполагает постоянство вертикальной составляющей первого шарика

$$v_y = \sqrt{2gh}\,.$$

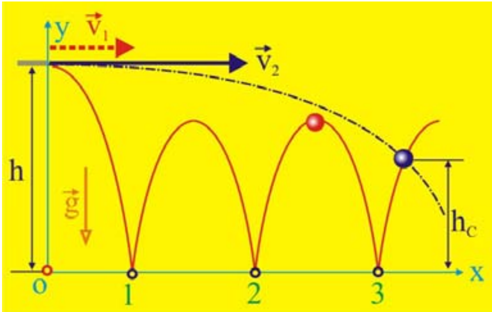

Рис. 1.300. Столкновение шариков

3. Вертикальная координата второго шарика будет подчиняться уравнению

$$h_1 = v_y t - \frac{gt^2}{2}\,.$$

4. Вертикальная координата второго шарика

$$h_2 = h - \frac{gt^2}{2}\,.$$

5. Столкновение шариков происходит при равенстве их вертикальных координат

$$h_1 = h_2 = h_C;\quad v_y t - \frac{gt^2}{2} = h - \frac{gt^2}{2};$$

6. Время, прошедшее от начала движения до столкновения

$$\tau = \frac{h}{v_y}\,.$$

7. Подставим Полётное время до столкновения в уравнение вертикальной координаты второго шарика

$$h_2 = h_C = h - \frac{g}{2}\frac{h^2}{2gh} = \frac{3}{4}h = 0{,}9\ \text{м}\,.$$

8. До столкновения шарикb переместится на расстояние

$$s_1 = v_1(t_0 + t_1);\quad s_2 = v_2 t_1\,,$$

время совместного полёта шариков до столкновения

$$\frac{3}{4}h = \frac{gt_1^2}{2};\quad \Rightarrow\quad t_1 = \sqrt{\frac{3h}{2g}} = 0{,}42\ \text{с}\,.$$

9. Определим с учётом числа отскоков время движения до столкновения первого шарика t_0

$$t_0 = 4\sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}96\ \text{с}\,.$$

10. В момент столкновения

$$s_1 = s_2;\quad v_1(t_0 + t_1) = v_2 t_1;\quad v_2 = \frac{v_1(t_0 + t_1)}{t_1} = \frac{1\cdot 2{,}4}{0{,}42} = 5{,}7\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\,.$$