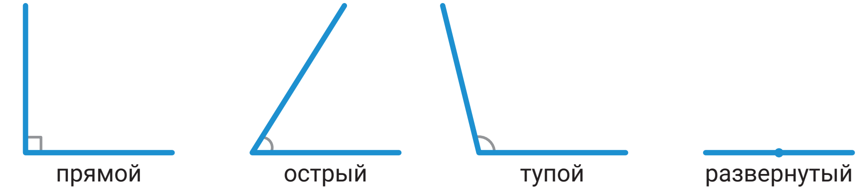
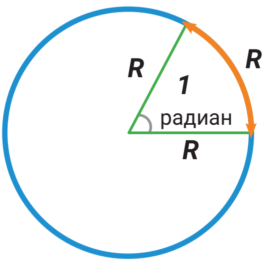
Геометрия

Углы

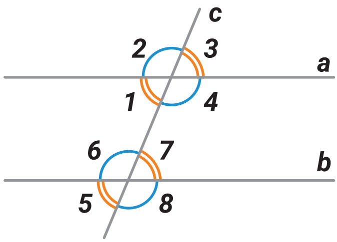


Прямой – угол, равный $90°$,
Острый – угол, меньший $90°$,
Тупой угол – угол от $90°$ до $180°$.
Развернутый – угол, равный $180°$.



1 радиан – центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу окружности.

Смежные углы - углы, у которых одна сторона общая, а две другие лежат на одной прямой



Углы при параллельных прямых и секущей

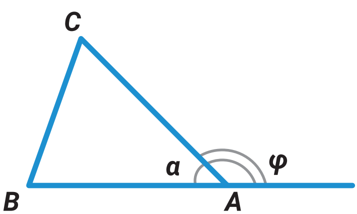
$\angle 1 = \angle 3$ - вертикальные углы равны

$\angle 3 = \angle 5$ - накрест лежащие углы равны.

$\angle 2 = \angle 6$ - соответственные углы равны

$\angle 2 + \angle 3 = 180°$ - сумма смежных углов равна $180°$.

$\angle 1 + \angle 6 = 180°$ - сумма односторонних углов равна $180°$.



Внешний угол треугольника – угол, смежный с одним из углов треугольника.

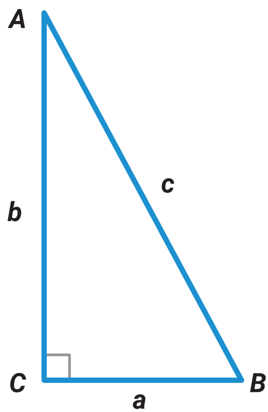
$$\alpha + \varphi = 180°$$

$$\sin\varphi = \sin\alpha; \quad \cos\varphi = -\cos\alpha; \quad \mathrm{tg}\,\varphi = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\varphi = \angle B + \angle C$$

Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним.

Прямоугольный треугольник



Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

a и **b** – катеты, **c** – гипотенуза.

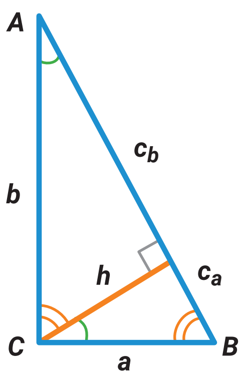
Часто встречающиеся пифагоровы тройки:

3; 4; 5	*7; 24; 25*
5; 12; 13	*8; 15; 17*

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

$\sin\angle A = \dfrac{a}{c}$	$\sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1$	$\angle A + \angle B = 90°$
$\cos\angle A = \dfrac{b}{c}$	$tg^2\angle A + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\angle A}$	$\sin\angle A = \cos\angle B$
$tg\angle A = \dfrac{a}{b}$	$ctg^2\angle A + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\angle A}$	$\cos\angle A = \sin\angle B$
$ctg\angle A = \dfrac{b}{a}$	$tg\angle A \cdot ctg\angle A = 1$	$tg\angle A = ctg\angle B$

Высота в прямоугольном треугольнике ,проведенная из вершины прямого угла, делит его на два треугольника, подобных данному.



$\triangle ABC \sim \triangle CBH \sim \triangle ACH$

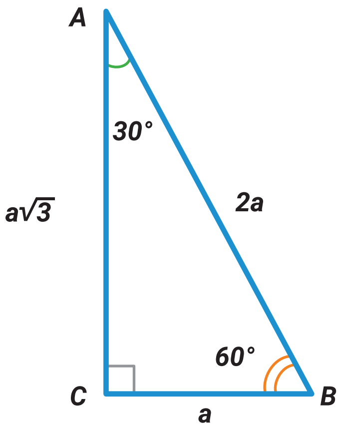
$$S_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

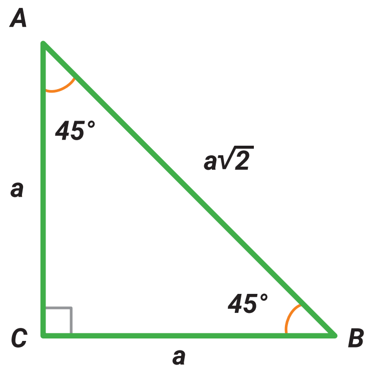
$h^2 = c_a \cdot c_b$; $a^2 = c \cdot c_a$; $b^2 = c \cdot c_b$

Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника: $R = \dfrac{c}{2}$

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \dfrac{a + b - c}{2}$

«Особенные» треугольники





Сумма углов треугольника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

Неравенство треугольника:

$c < a + b$

$a < b + c$

$b < a + c$

Формулы площади треугольника:

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\angle C = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = p \cdot r = \frac{abc}{4R}.$$

Здесь $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр, r – радиус вписанной окружности,

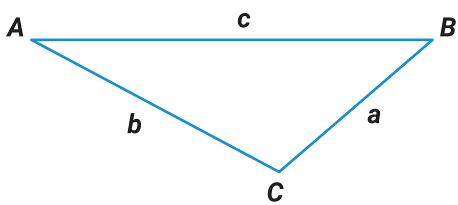
R – радиус описанной окружности.

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$$

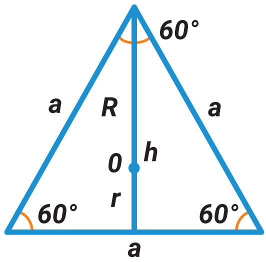
Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle C$$



В треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона

Правильный треугольник



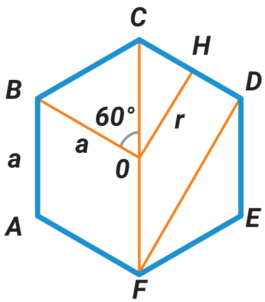
Высота правильного треугольника: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

Радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

Площадь правильного треугольника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Правильный шестиугольник



$S_{пр.шестиугольника} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$

$R = a$ – радиус описанной окружности,

$r = OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – радиус вписанной окружности,

$CF = 2a$ – большая диагональ

$FD = a\sqrt{3}$ – диагональ.

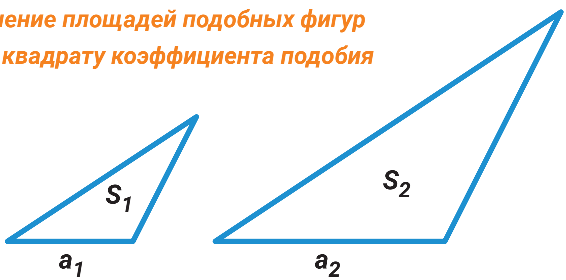
Признаки равенства треугольников

- По трем сторонам. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.
- По углу и двум прилежащим к нему сторонам
- По стороне и двум прилежащим к ней углам.

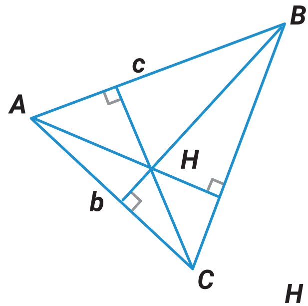
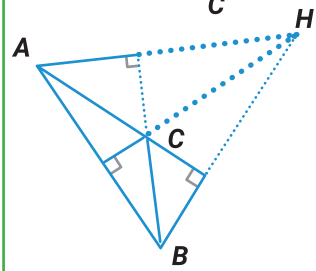
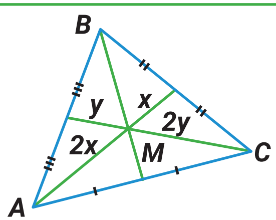
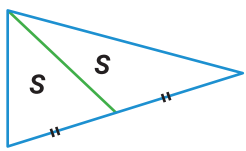
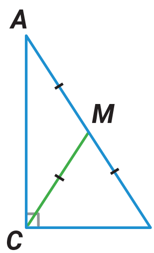
Признаки подобия треугольников

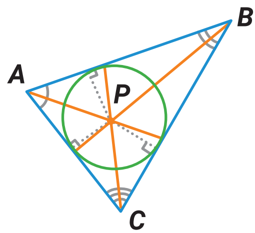
- По двум углам
- По трем сторонам.
- По углу и двум прилежащим к нему сторонам

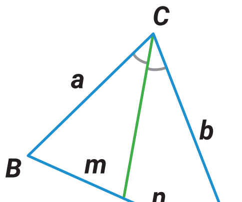
Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия

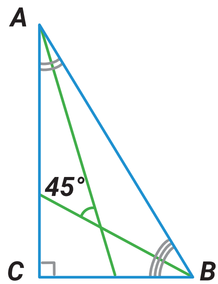


$S_1 : S_2 = (a_1 : a_2)^2 = k^2$

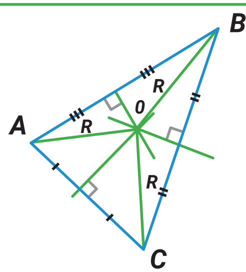
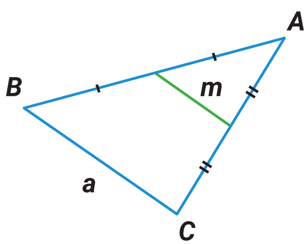
Элементы треугольника		
Высота треугольника – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.	 	Высоты треугольника пересекаются в одной точке. В случае тупоугольного треугольника пересекаются продолжения высот. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту $S\triangle=\dfrac{a\cdot h_a}{2}=\dfrac{b\cdot h_b}{2}=\dfrac{c\cdot h_c}{2}$
Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.	   $CM = AM = BM = R$	Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении **2:1**, считая от вершины. Медиана треугольника делит его на два равных по площади треугольника. Три медианы треугольника делят его на **6** равных по площади треугольников. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

<table>
<tr>
<td>Биссектриса треугольника делит угол треугольника пополам.</td>
<td>



$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$

</td>
<td>Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон треугольника и является центром окружности, вписанной в треугольник.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон.

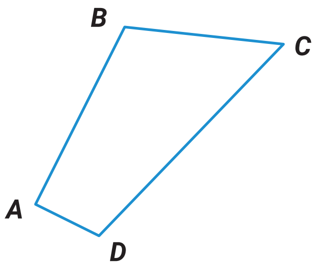
Острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника равен 45°.</td>
</tr>
<tr>
<td>Серединный перпендикуляр к стороне треугольника – это множество точек, одинаково удаленных от ее концов.</td>
<td>
</td>
<td>Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром окружности, описанной вокруг треугольника.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td colspan="2">Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины его сторон.

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

$m = \frac{a}{2};\ m \parallel a$</td>
</tr>
</table>

Четырехугольники

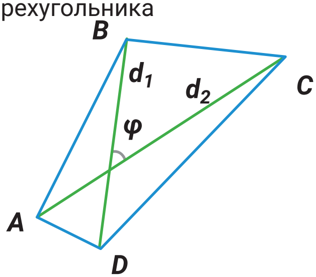
Выпуклый



Сумма углов выпуклого четырехугольника равна ***360°***

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

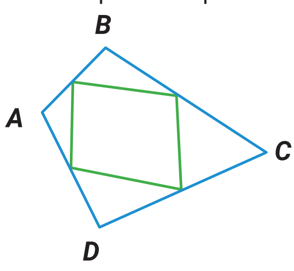
Площадь выпуклого четырехугольника



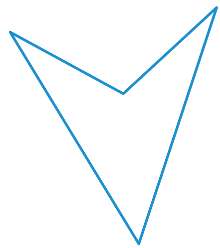
$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\varphi.$$

d_1 ***и*** d_2 – диагонали.

Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма

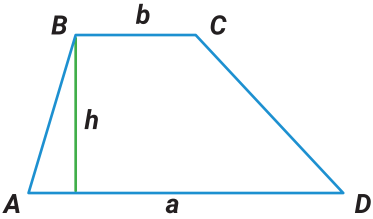
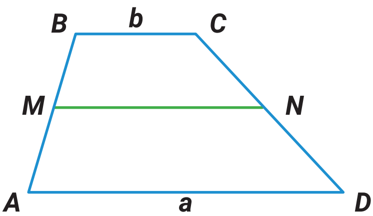
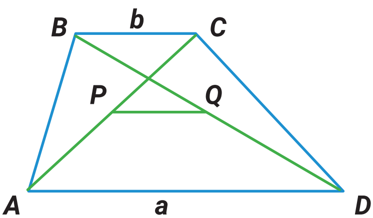
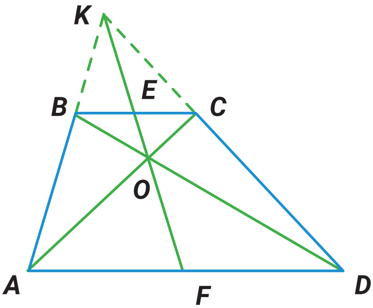


Невыпуклый

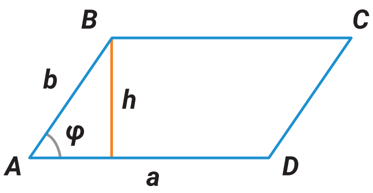


На практике: представляем как комбинацию треугольников и выпуклых четырехугольников.

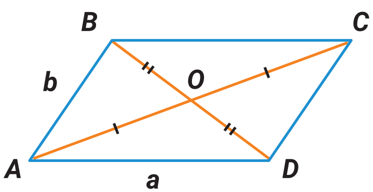
Трапеция – четырехугольник, имеющий ровно одну пару параллельных сторон.

	$BC \parallel AD$; ***BC*** и ***AD*** – основания, ***AB*** и ***CD***– боковые стороны. $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$ $S_{трап} = \frac{a+b}{2} \cdot h$
	***M*** – середина ***AB***, ***N*** – середина ***CD***. ***MN*** – средняя линия трапеции. $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{a+b}{2}$
	Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований. ***P*** – середина ***AC***, ***Q*** – середина ***BD***. $PQ = \frac{a-b}{2}$
	$K = (AB) \cap (CD)$; ***E*** - середина ***BC***, ***F*** – середина ***AD***, $O = AC \cap BD$. Замечательное свойство трапеции: середины оснований, точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

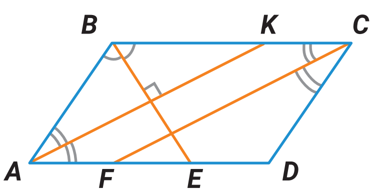
Параллелограмм – четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.
$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

<table>
<tr>
<td>


$S = a \cdot h = ab\sin\varphi$
</td>
<td>
Четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны параллельны и равны.

$AB \parallel CD$, $AB = CD \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

$AO = OC$, $BO = OD$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


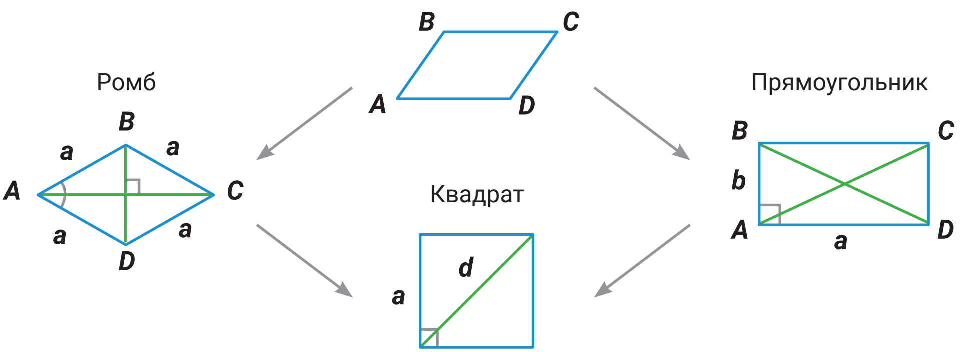
$AK \parallel CF$, $AK \perp BE$.
</td>
<td>
Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.

Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.

Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

$AB = AE$, $DF = CD$.
</td>
</tr>
</table>

Виды параллелограммов



Ромб. Параллелограмм, у которого все стороны равны.
Диагонали ромба перпендикулярны.
Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

$S_{ромба} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 – диагонали.

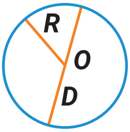
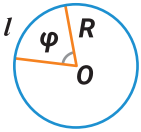
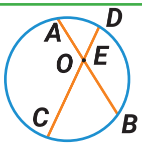
Прямоугольник. Параллелограмм, все углы которого прямые.
Диагонали прямоугольника равны.

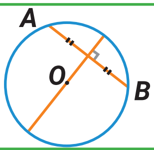
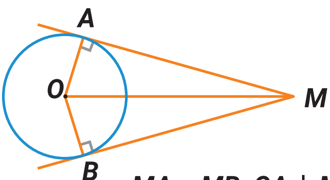
$S_{прямоугольника} = a \cdot b$

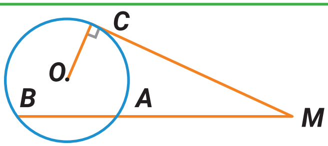
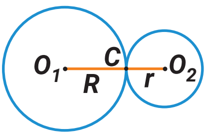
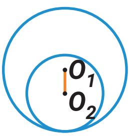
Квадрат. Ромб, все углы которого прямые. Другими словами: прямоугольник, у которого все стороны равны.

Окружность и круг

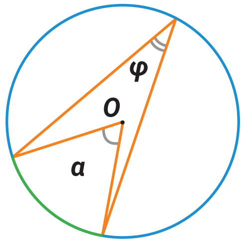
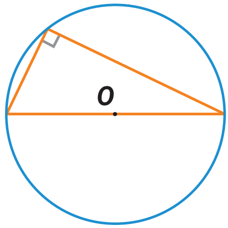
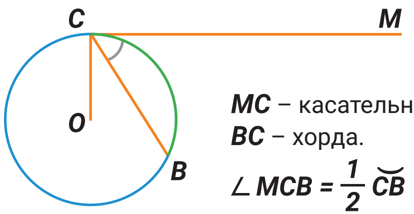
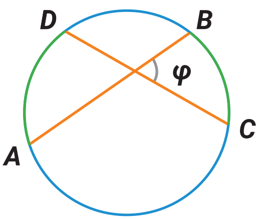
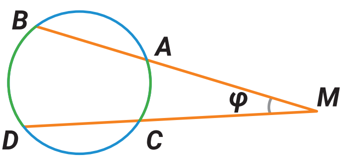
Число π равно отношению длины окружности к ее диаметру. $\pi \approx 3,14159...$

<table>
<tr><td>
</td><td>$L = 2\pi R$ – длина окружности
$S = \pi R^2$ – площадь круга
$D = 2R$ – диаметр окружности</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$l_{дуги} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi R$ – длина дуги
$S_{сектора} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi R^2$ – площадь сектора</td></tr>
<tr><td>

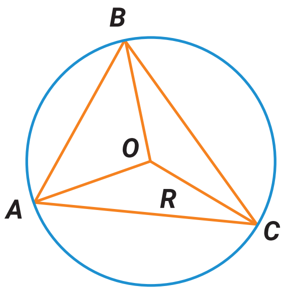
$AE \cdot BE = CE \cdot DE$</td><td>Хорда – отрезок, соединяющий две точки на окружности.
Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.</td></tr>
<tr><td>

$MA = MB,\ OA \perp MA$</td><td>Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.
Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Теорема о секущей и касательной:
Квадрат отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей.
$MC^2 = MA \cdot MB$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Внешнее касание окружностей:
$O_1O_2 = R + r$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Внутреннее касание окружностей:
$O_1O_2 = R - r$</td></tr>
</table>

Центральный и вписанный угол

 ***α*** – центральный угол, ***φ*** – вписанный угол. $\varphi = \alpha/2$	Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги или на одну и ту же дугу, равны. Равные дуги стягиваются равными хордами.
	Вписанный угол, опирающийся на диаметр, - прямой.
 ***MC*** – касательная, ***BC*** – хорда. $\angle MCB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CB}$	Угол между хордой и касательной, проведенной через конец этой хорды, равен половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.
 $\varphi = \frac{\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{BC}}{2}$	Угол между пересекающимися хордами равен полусумме заключенных между ними дуг.
 $\varphi = \frac{\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{AC}}{2}$	Угол между секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности угловых величин дуг, заключенных внутри угла.

Вписанные и описанные треугольники



Центр окружности, описанной вокруг треугольника - это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

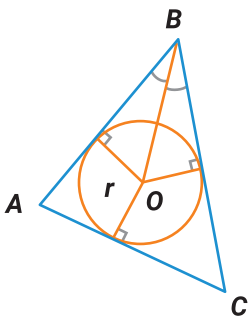
$$OA = OB = OC$$

Центр описанной окружности равноудален от вершин треугольника.

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$$

(теорема синусов)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$



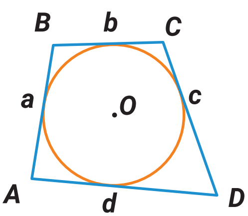
Центр окружности, вписанной в треугольник - это точка пересечения биссектрис треугольника.

Центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.

$S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$

Описанные и вписанные четырехугольники

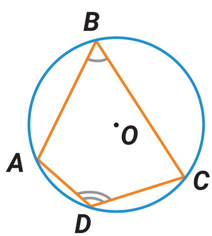
Описанный четырехугольник



$$a + c = b + d$$

Окружность можно вписать в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Вписанный четырехугольник



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$$

Окружность можно описать вокруг четырехугольника тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны **180°**

Векторы на плоскости

Физические величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются ***векторными***.

Вектор — это направленный отрезок.

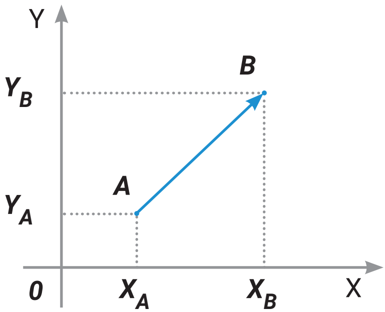
Длиной вектора называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку пространства.

Единичным называется вектор, длина которого равна 1. ***Нулевым*** — вектор, длина которого равна нулю. Его начало совпадает с концом.

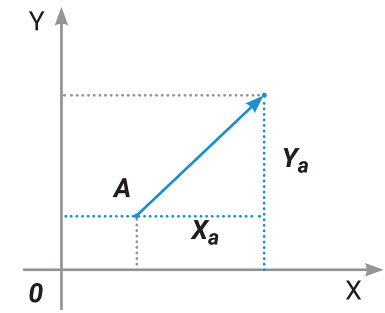
Вектор на плоскости можно задать двумя координатами: $\vec{a}\,(x_a, y_a)$

Координаты вектора на плоскости:



$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$$

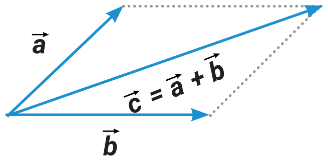
Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат



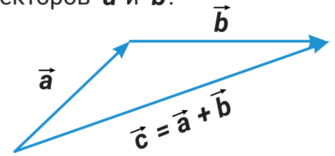
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

Сложение векторов

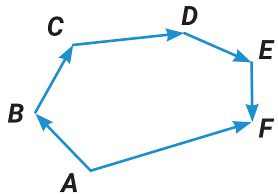
1 способ. ***Правило параллелограмма***. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



2 способ. ***Правило треугольника***. Возьмем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов.



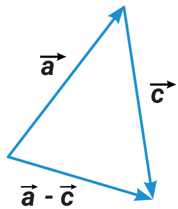
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

При сложении векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b)$ получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c}\,(x_a + x_b, y_a + y_b)$

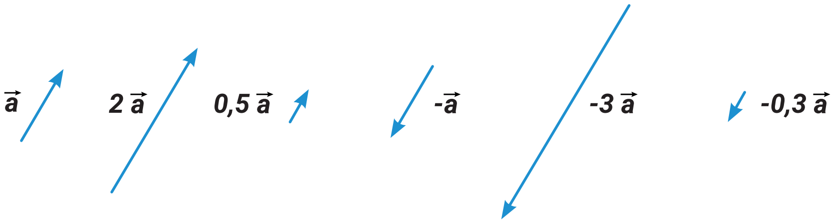
Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$.

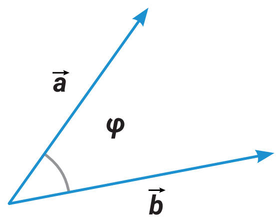
Он сонаправлен с вектором, если k больше нуля, и направлен противоположно, если k меньше нуля.



Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$



Скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}$$

Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Коллинеарность векторов.

Коллинеарными называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарны, если существует такое число λ не равное нулю, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Полезные факты для решения задач ЕГЭ по геометрии

Углы, треугольники, четырехугольники

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
2. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.
4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
5. Площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.
6. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.
7. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований.
8. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на однойпрямой.

Окружности

9. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
10. Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.
11. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
12. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
13. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.
14. Теорема о касательной и секущей. Если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.
15. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.
16. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.
17. Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

18. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами ***a*** и ***b*** и гипотенузой ***c***, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

19. Точка касания окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры.

20. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

21. Если расстояние между центрами окружностей радиусами ***R*** и ***r*** равно ***a*** и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ и $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$

22. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна ***180*** градусов.

23. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.

24. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии.

25. Геометрическое место точек ***M***, из которых отрезок ***AB*** виден под прямым углом (угол ***AMB = 90*** градусов), есть окружность с диаметром ***AB*** без точек ***A*** и ***B***.

26. Геометрическое место точек ***M***, из которых отрезок ***AB*** виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой ***AB***, без точек ***A*** и ***B***.

27. Если ***M*** – точка касания со стороной ***AC*** окружности, вписанной в треугольник ***ABC***, то $AM = p - BC$, где ***p*** – полупериметр треугольника ***ABC***.

28. Если окружность касается стороны ***BC*** треугольника ***ABC*** и продолжений сторон ***AB*** и ***AC***, то расстояние от вершины ***A*** до точки касания окружности с прямой ***AB*** равно полупериметру треугольника ***ABC***.

29. Если окружность, вписанная в треугольник ***ABC***, касается сторон ***AB***, ***BC*** и ***AC*** соответственно в точках ***K***, ***L***, ***M***, а угол ***BAC*** равен φ, то угол ***KLM*** равен $90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

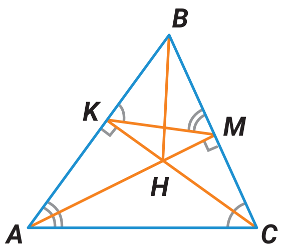
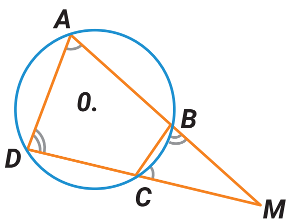
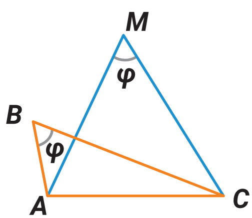
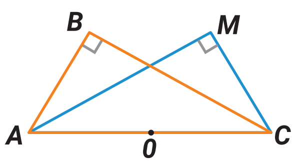
30. Если прямые, проходящие через точку ***A***, касаются окружности ***S*** в точках ***B*** и ***C***, то центр вписанной окружности треугольника ***ABC*** лежит на окружности ***S***.

31. Если ***AM*** и ***CK*** – высоты треугольника ***ABC***, то треугольник ***MBK*** подобен треугольнику ***ABC***, причем коэффициент подобия равен $|\cos B|$.

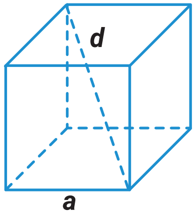
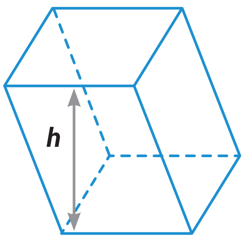
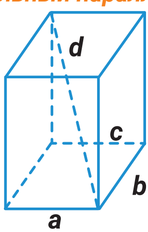
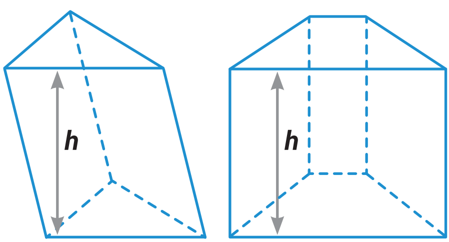
32. Если площадь треугольника равна ***S***, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

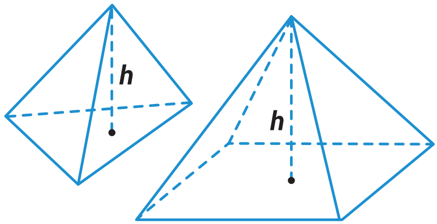
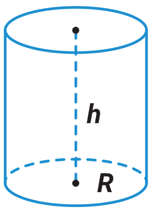
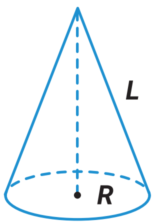
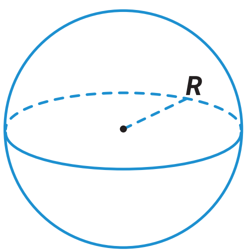
При составлении списка полезных фактов использованы учебные пособия
Р. К. Гордина.

«Классические» схемы для решения задач ЕГЭ по геометрии

	*Схема 1.* В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. H – точка пересечения высот треугольника (ортоцентр), $H = AM \cap CK$ $\triangle MBK \sim \triangle ABC$, $k = \lvert\cos B\rvert$ Четырехугольник $AKMC$ можно вписать в окружность. Четырехугольник $BKMH$ можно вписать в окружность. Радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABC, AHC, BHC и ABH, равны. $BH = 2R\,\lvert\cos B\rvert$,где R – радиус описанной окружности $\triangle ABC$.
	*Схема 2.* Пусть луч MA пересекает окружность в точках A и B, а луч MD – в точках C и D, причем $MA > MB$, $MD > MC$. Тогда треугольники BMC и DMA подобны.
	*Схема 3.* У треугольников ABC и AMC сторона AC – общая, угол B равен углу M. Тогда точки A, B, C, M лежат на одной окружности.
	*Схема 4.* У треугольников ABC и AMC сторона AC – общая, углы B и M – прямые. Тогда точки A, B, C, M лежат на окружности, радиус которой равен половине AC.

Стереометрия на ЕГЭ по математике. Основные формулы

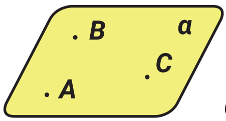
Многогранники	Объем и площадь поверхности
Куб  $d = a\sqrt{3}$ - длина диагонали	$V = a^3$ $S = 6a^2$ a – ребро куба
Параллелепипед 	$V = S_{осн} \cdot h$ $S_{осн}$ - площадь основания h - высота Площадь поверхности паралле-лепипеда равна сумме площадей всех его граней
Прямоугольный параллелепипед  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ - длина диагонали	$V = a \cdot b \cdot c$ $S = 2ab + 2bc + 2ac$
Призма 	$V = S_{осн} \cdot h$ $S = 2S_{осн} + S_{бок}$

Многогранники	**Объем и площадь поверхности**
Пирамида 	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ $S = S_{осн} + S_{бок}$
Тела вращения	**Объем и площадь поверхности**
Цилиндр  *h* - высота цилиндра.	$V = \pi R^2 \cdot h$ $S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\,\pi R^2 + 2\pi Rh$
Конус  $L = \sqrt{R^2 + h^2}$ - образующая	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ $S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi RL$
Шар 	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ $S = 4\pi R^2$

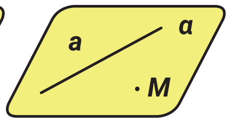
Основные понятия стереометрии

Плоскости в пространстве

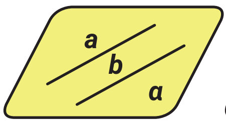
Плоскость в пространстве можно провести:



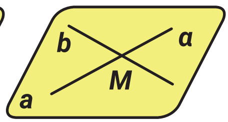
1. Через три точки не лежащие на одной прямой



2. Через прямую, и не лежащую на ней точку

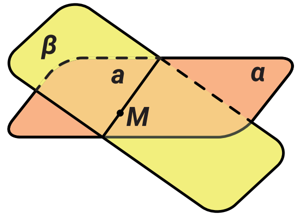


3. Через две параллельные прямые

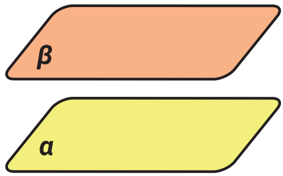


4. Через две пересекающиеся прямые

Плоскости в пространстве могут быть параллельными или пересекаться.

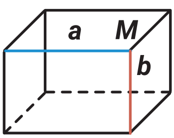


Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой

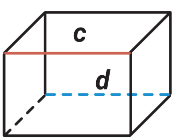


Если 2 плоскости не имеют общих точек, то они параллельны друг другу

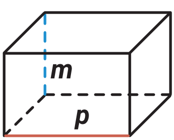
Расположение прямых в пространстве, три случая:



Пересекаются
$a \cap b = M$



Параллельны
$c \parallel d$

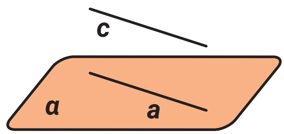


Скрещиваются
$m \mathbin{\dot{-}} p$

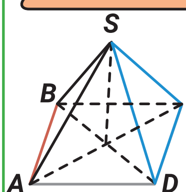
Параллельность прямой и плоскости

Определение: Прямая параллельна плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости: Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой либо прямой, лежащей в плоскости



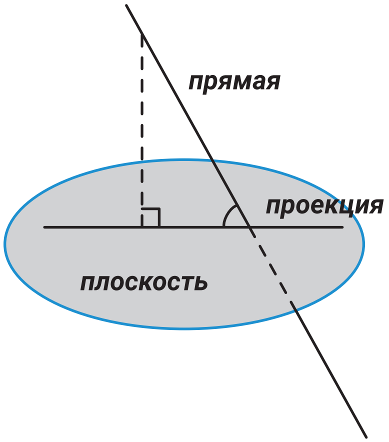
$\left.\begin{array}{l} c \parallel a \\ a \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$



$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ CD \in (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

Угол между прямой и плоскостью

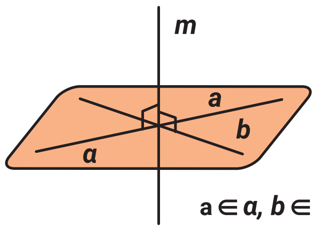
Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость.



Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение: Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

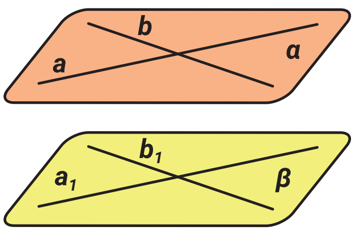


$$\left.\begin{array}{l} a \in \alpha,\ b \in \alpha \\ m \perp a \\ m \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow m \perp \alpha$$

Признак параллельности плоскостей

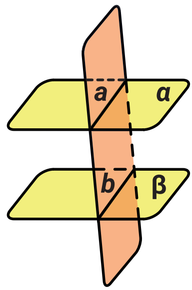
Определение: Плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

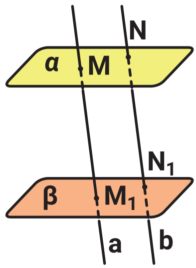
Признак параллельности плоскостей: Плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel a_1 \\ a \parallel a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Свойства параллельных плоскостей



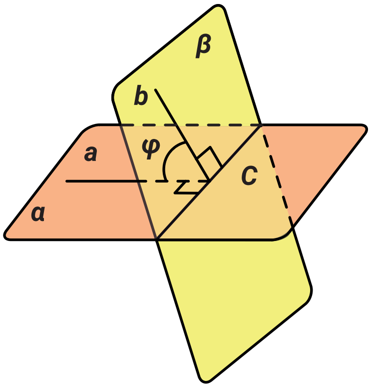


$$\left.\begin{array}{l} \varphi \cap \alpha \\ \varphi \cap a \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями равны.

Угол между плоскостями



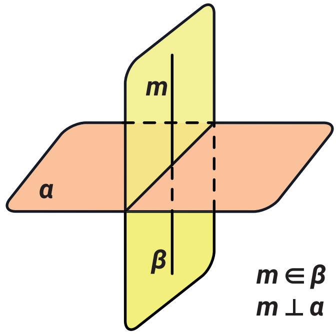
φ – угол между плоскостями ***α*** и ***β***.

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Перпендикулярность плоскостей

Определение: Две плоскости перпендикулярны, если угол между ними равен ***90°***.

Признак перпендикулярности плоскостей.



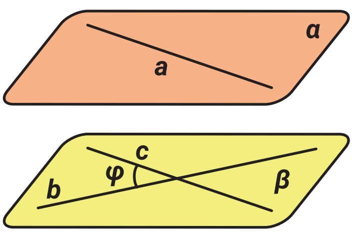
$$\left.\begin{matrix} m \in \beta \\ m \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Если плоскость ***α*** проходит через перпендикуляр к плоскости ***β***, то плоскости ***α*** и ***β*** перпендикулярны.

Расстояние от точки до плоскости - это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Угол между скрещивающимися прямыми

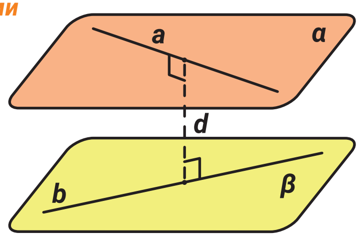
Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.



$a \in \alpha$
$b \in \beta$
$\alpha \parallel \beta$

Прямые ***a*** и ***b*** – скрещиваются, Проведем в плоскости ***β*** прямую **c || a**. Угол ***φ*** между ***b*** и ***c*** равен углу между ***a*** и ***b***.

Расстояние между скрещивающимися прямыми



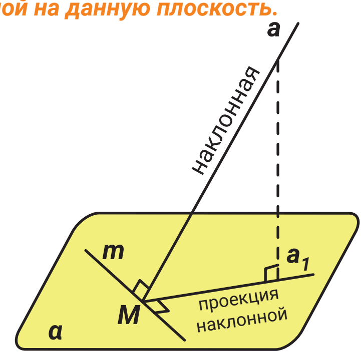
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Другими словами, оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.

Можно сказать, что оно равно расстоянию от одной из этих прямых до параллельной ей плоскости, в которой лежит другая прямая.

Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.



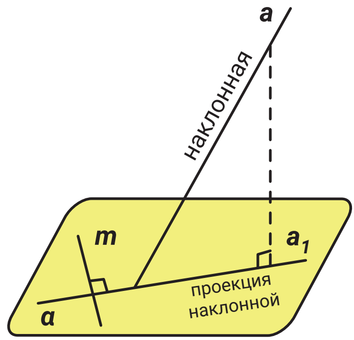
$m \in \alpha$

a – наклонная

a_1 – проекция наклонной на плоскость α

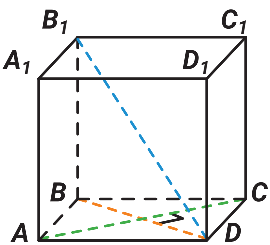
$m \perp a \Leftrightarrow m \perp a_1$

Теорема о трех перпендикулярах выполняется и в этом случае:



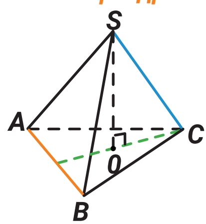
Теорема о трёх перпендикулярах в задачах

В кубе:



$BD \perp AB \Rightarrow B_1D \perp AC$

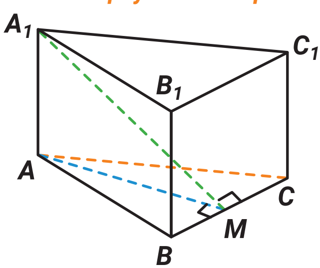
В правильном тетраэдре SABC:



OC – проекция SC на плоскость ABC.

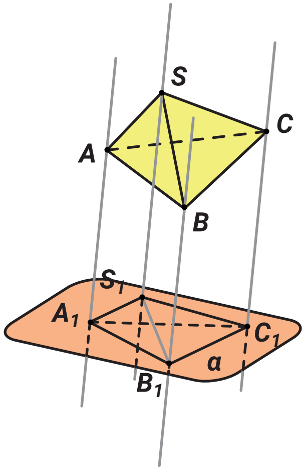
$OC \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$

В правильной треугольной призме:



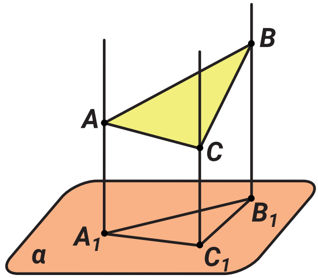
$AM \perp BC => A_1M \perp BC$

Параллельное проецирование



α – плоскость проекции

Площадь прямоугольной проекции фигуры

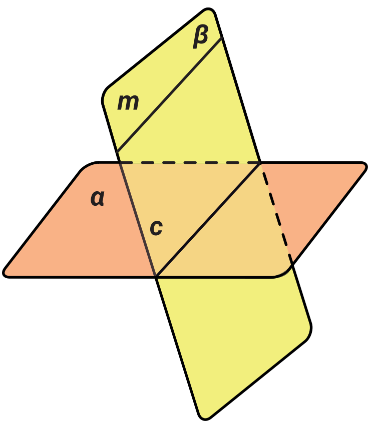


$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$$

Площадь прямоугольной проекции фигуры равна произведению площади фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

Теорема о прямой и параллельной ей плоскости:

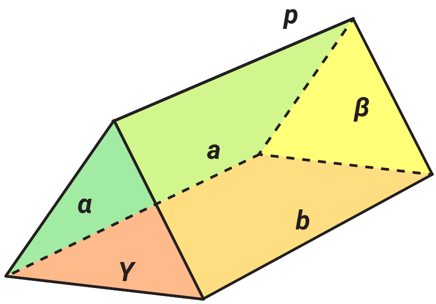
Пусть прямая ***m*** параллельна плоскости ***α***. Если плоскость ***β*** проходит через прямую ***m*** и пересекает плоскость ***α*** по прямой ***c***, то ***c*** параллельна ***m***.



$$\left.\begin{aligned} m \parallel \alpha \\ m \in \beta \\ \beta \cap \alpha = c \end{aligned}\right\} \Rightarrow c \parallel m$$

Теорема. Пусть плоскости ***α*** и ***β*** пересекаются по прямой ***p***. Плоскость ***γ*** параллельна прямой ***p***. Тогда она пересекает плоскости ***α*** и ***β*** по прямым, параллельным ***p***.

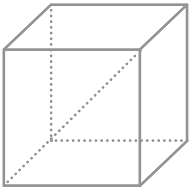
a || b || p



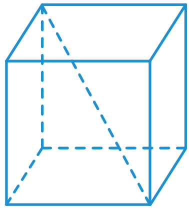
$$\left.\begin{aligned} \alpha \cap \beta = p \\ p \parallel \gamma \\ \beta \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \parallel b \parallel p$$

Чертежи в задачах по стереометрии

Куб

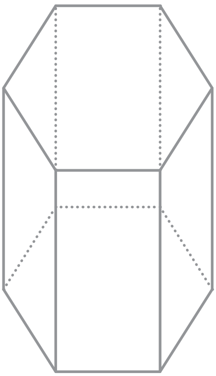


Неудачно.
Главная диагональ
и боковые ребра
оказались на
одной линии.

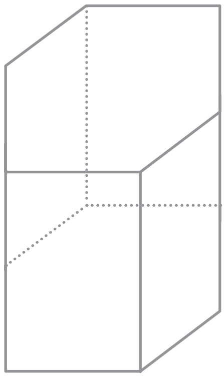


OK

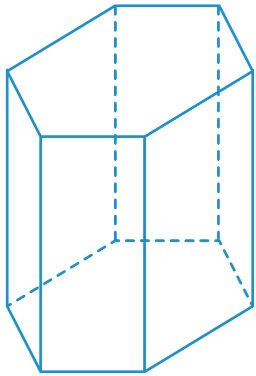
Шестигранная призма



Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования. Ребра передней и задней грани оказались на одной линии

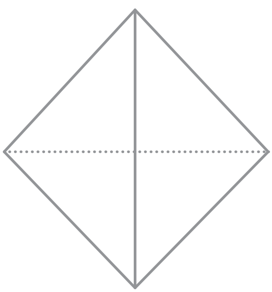


Неудачно. Стороны основания и боковые ребра оказались на одной линии



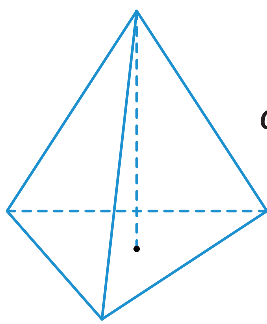
OK

Тетраэдр



Неудачно.

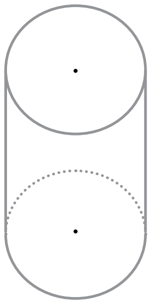
Рисунок стал «плоским».



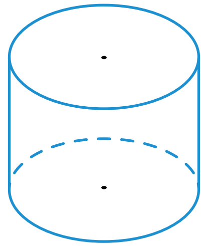
OK

Чертежи в задачах по стереометрии

Цилиндр

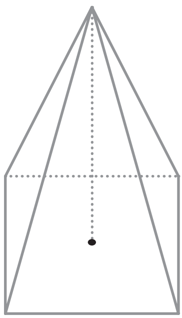


Неудачно.
Нарушены правила параллельного проецирования.

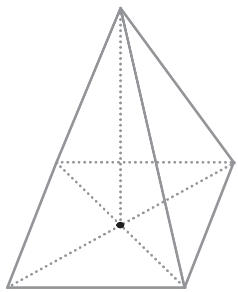


ОК

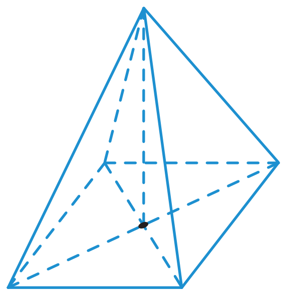
Правильная четырехугольная призма



Неудачно.
Нарушены правила параллельного проецирования



Неудачно.
Левая боковая грань не видна.



ОК

1. Строим чертеж ручкой (не карандашом!), с помощью линейки. Линейкой на ЕГЭ по математике пользоваться можно и нужно.
2. Невидимые элементы объемного тела изображаем штриховыми линиями.
3. Объемное тело на вашем чертеже должно выглядеть действительно объемным. Все значимые элементы – хорошо видимыми.
4. Если чертеж вам не нравится, рисуйте другой.