Закон сохранения импульса

Примеры решения задач

Задача 1. *Тело массой 2 кг свободно падает без начальной скорости с высоты 5 м на горизонтальную поверхность и отскакивает от нее со скоростью 5 м/с. Найдите абсолютную величину изменения импульса тела при ударе. g = 10 м/с^2.*

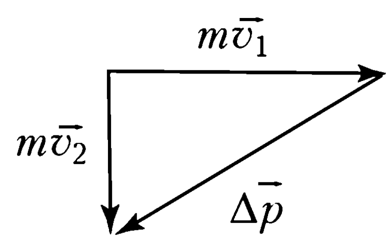
В проекции на ось, направленную вертикально вверх, получаем

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \left|\Delta p_y\right| = \left|p_{2y} - p_{1y}\right| = mv_2 - (-mv_1) = m(v_2 + v_1) = 30 \text{ кг·м/с},$$

где v_2 = 5 м/с — скорость отскока, а $v_1 = \sqrt{2gh}$ = 10 м/с — скорость падения.

Задача 2. *Мячик массой 200 г летел со скоростью 20 м/с. После удара о стенку он отскочил под прямым углом к прежнему направлению со скоростью 15 м/с. Найдите модуль изменения импульса мячика при ударе.*

Изобразив на рисунке начальный и конечный импульсы и вектор их разности, получаем



$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} = 5 \text{ кг·м/с}.$$

Задача 3. *Стальной шарик массой 0,1 кг падает на горизонтальную плоскость с высоты 0,2 м и отскакивает после удара снова до высоты 0,2 м. Найдите среднюю силу давления шарика на плоскость при ударе, если его длительность 0,04 с. g = 10 м/с^2.*

Среднюю силу, действующую на шарик, можно выразить через изменение импульса

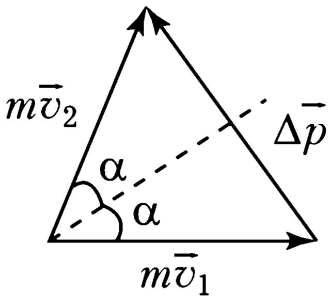
$$\vec{F}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

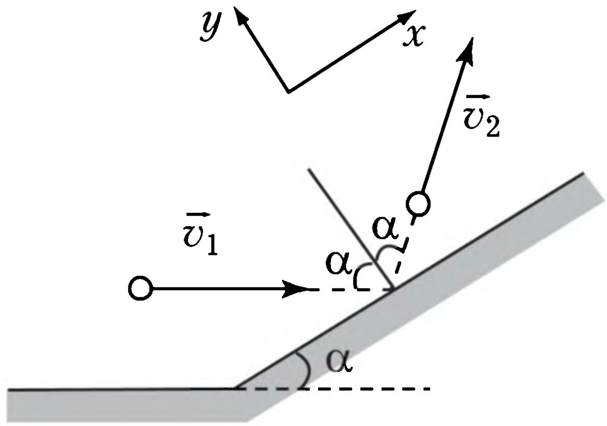
В проекции на ось, направленную вертикально вверх,

$$\left(F_{\text{ср}}\right)_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{mv - (-mv)}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{\Delta t} = 10 \text{ Н}.$$

Мы нашли среднее значение *равнодействующей* силы, которая складывается из реакции плоскости и силы тяжести: $F_{ср} = N_{ср} - mg$, откуда $N_{ср} = F_{ср} + mg = 11$ Н. Из 3-го закона Ньютона следует, что сила давления шарика на плоскость равна силе реакции плоскости.

Задача 4. *Стальной шарик массой 40 г, летящий горизонтально со скоростью 20 м/с, ударяется о наклонную плоскость, составляющую угол 30° с горизонтом. Считая удар абсолютно упругим, найдите среднюю силу взаимодействия шарика с наклонной плоскостью. Продолжительность удара 0,01 с. Действием силы тяжести за время удара пренебречь.*





Поскольку действием силы тяжести за время удара пренебрегаем, средняя сила, с которой плоскость при ударе действует на шарик, равна

$$\vec{F}_{ср} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

Изменение импульса $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ можно найти графически. Поскольку отражение происходит с той же скоростью под тем же углом к наклонной плоскости, вектор $\Delta\vec{p}$ (а значит, и $\vec{F}_{ср}$) перпендикулярен к наклонной плоскости. Из рисунка получаем $|\Delta\vec{p}| = 2mv\sin\alpha$, откуда $F_{ср} = (2mv\sin\alpha)/\Delta t = 80$ Н.

Замечание. Можно решать задачу не графически, а в проекциях. Видно, что в проекции на ось x импульс не меняется (что понятно и при анализе сил: в пренебрежении силой тяжести на шарик действует только сила нормальной реакции). Значит, $|\Delta\vec{p}| = |\Delta p_y| = mv\sin\alpha - (-mv\sin\alpha) = 2mv\sin\alpha$.

Задача 5. *Какова средняя сила давления на плечо при стрельбе из автомата, если масса пули 10 г, а скорость пули при вылете 300 м/с? Автомат делает 300 выстрелов в минуту.*

Рассмотрим систему, состоящую из автомата и пуль. Изменение импульса этой системы за произвольный интервал времени Δt равно импульсу внешней силы F, с которой плечо стрелка действует на автомат (равной силе давления автомата на плечо)

$$F\Delta t = \Delta N(mv - 0),$$

где ΔN — число пуль, вылетевших за это время. Произвольно выбранный интервал Δt сокращается, поскольку $\Delta N = n\Delta t$, где n — «скорострельность», т. е. число пуль, вылетающих за секунду (по условию $n = 300$ мин$^{-1}$ = 5 с$^{-1}$). Получаем

$$F = nmv = 15 \text{ Н}.$$

Задача 6. *Ракета массой 2 т неподвижно висит над землей, выбрасывая вниз реактивную струю со скоростью 1250 м/с. Какая масса газов выбрасывается в струе за 1 с? $g = 10$ м/с^2.*

На выбрасываемые газы действует со стороны ракеты сила, равная скорости изменения их импульса. Такая же сила действует на ракету со стороны газов (ее называют *реактивной силой*). Запишем закон изменения импульса газов за малый промежуток времени Δt

$$F_{\text{р}}\Delta t = \Delta m \cdot u,$$

где Δm — масса газов, выброшенных за время Δt, u — скорость выброса газов. Поскольку $\Delta m = \mu\Delta t$, где μ — масса газов, выбрасываемых за 1 с (расход топлива), получим

$$F_{\text{р}} = \mu u,$$

откуда найдем расход топлива: $\mu = F_{\text{р}}/u = mg/u = 16$ кг. Мы учли, что в данном примере ракета покоится, и 2-ой закон Ньютона для нее имеет вид: $F_{\text{р}} - mg = 0$.

Замечание. Если ракета движется с ускорением, формула для реактивной силы имеет такой же вид. Проще всего убедиться в этом, перейдя в систему отсчета, в которой ракета в данный момент покоится.

Задача 7. *Тонкую мягкую цепочку массой 200 г удерживают за один конец так, что другой ее конец касается стола. Цепочку отпускают, и она падает на стол. Считая, что все элементы цепочки, находящиеся в воздухе, падают свободно, найдите силу давления на стол в тот момент, когда в воздухе находится половина цепочки. $g = 10$ м/с^2.*

Рассмотрим момент времени, когда верхний конец цепочки опустился на h. Силу реакции стола N можно разбить на две части. Одна часть N_1 уравновешивает силу тяжести лежащей на столе части цепочки длиной h: $N_1 = (m/l)hg$, где m — масса цепочки, l — ее длина. Другая часть N_2 возникает при ударе падающих элементов цепочки на стол, она равна скорости изменения их импульса.

Чтобы вычислить N_2, рассмотрим малый интервал времени Δt. За это время в соприкосновение с плоскостью придет элемент цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\Delta m = (m/l)v\Delta t$. Изменение его импульса в проекции на ось y, направленную вертикально вверх, равно

$$\Delta p_y = 0 - (-\Delta m \cdot v) = \Delta m \cdot v,$$

откуда $N_{2y} = \Delta p_y / \Delta t = mv^2/l$. Поскольку при свободном падении цепочки $v^2 = 2gh$, то

$$N = N_1 + N_2 = 3mg\frac{h}{l},$$

что при $h = l/2$ дает $N = 1{,}5mg = 3$ Н.

Задача 8. *Конькобежец катил груженные сани по льду со скоростью 5 м/с, а затем толкнул их вперед и отпустил. С какой скоростью (в см/с) покатится конькобежец непосредственно после толчка, если скорость саней возросла до 8 м/с? Масса саней 90 кг, масса человека 60 кг. В ответе укажите модуль скорости.*

В пренебрежении силой трения система (человек + сани) замкнутая. Направим ось x вдоль начальной скорости $\vec{v}$, тогда и проекция конечной скорости саней будет положительной: $u_{1x} = u_1$. Направление скорости человека заранее не известно, но и не надо пытаться его угадать: найдя u_{2x}, мы определим и величину, и направление скорости. Закон сохранения импульса в проекции на ось x имеет вид

$$(m_1 + m_2)v = m_1 u_1 + m_2 u_{2x},$$

откуда

$$u_{2x} = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1 u_1}{m_2} = 0{,}5 \text{ м/с} = 50 \text{ см/с}.$$

Поскольку ответ положительный, то человек движется в прежнем направлении.

Задача 9. *Три лодки массами 100 кг каждая идут одна за другой с одинаковыми скоростями. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю бросают горизонтально со скоростью 2,2 м/с относительно лодки грузы массой 10 кг каждый. Найдите величину относительной скорости (в см/с) передней и задней лодок после попадания в них грузов.*

Решение задачи выглядит проще всего в системе отсчета, в которой все три лодки вначале покоятся. После переброски грузов средняя лодка останется на месте, а крайние лодки приобретут одинаковые скорости u, направленные в противоположные стороны. Величину этой скорости найдем из закона сохранения импульса для системы (груз + лодка)

$$mv_{\text{гр}} = (m+M)u\ .$$

Разность скоростей крайних лодок в этой системе отсчета равна

$$u-(-u) = 2u = \frac{2mv_{\text{гр}}}{m+M} = 40 \text{ см/с.}$$

Это и есть ответ к задаче, так как относительная скорость двух тел не зависит от выбора поступательно движущейся системы отсчета.

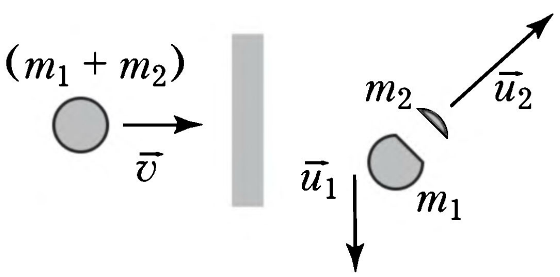
Задача 10. *От поезда, идущего с постоянной скоростью 64 км/ч, отделяется пятая часть состава. Через некоторое время скорость отделившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Считая, что сила тяги при разрыве не изменилась, найдите скорость (км/ч) головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна весу.*

Так как по условию полная сила, действующая на обе части состава, не меняется (остается равной нулю), то импульс системы сохраняется

$$mv = \frac{m}{5}\frac{v}{2} + \frac{4m}{5}u,$$

где u — скорость головной части поезда. Получаем $u = (9/8)v = 72$ км/ч.

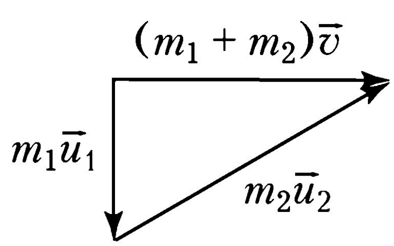
Задача 11. *Снаряд, летящий с некоторой скоростью, распадается на два осколка. Скорость большего осколка по величине равна начальной скорости снаряда и направлена перпендикулярно к ней. Скорость другого осколка по величине в 5 раз больше первоначальной. Найдите отношение масс осколков.*



Запишем закон сохранения импульса в векторной форме

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\ ,$$

где $\vec{v}$ — начальная скорость снаряда, $\vec{u}_1$ — скорость большего осколка, $\vec{u}_2$ — меньшего. Изобразив это векторное равенство на рисунке, получим прямоугольный треугольник ($\vec{u}_1 \perp \vec{v}$), стороны которого связаны теоремой Пифагора



$$(m_1+m_2)^2 v^2 + m_1^2 u_1^2 = m_2^2 u_2^2\ .$$

Подставив сюда $u_1 = v$ и $u_2 = 5v$, получим уравнение, связывающее между собой массы осколков

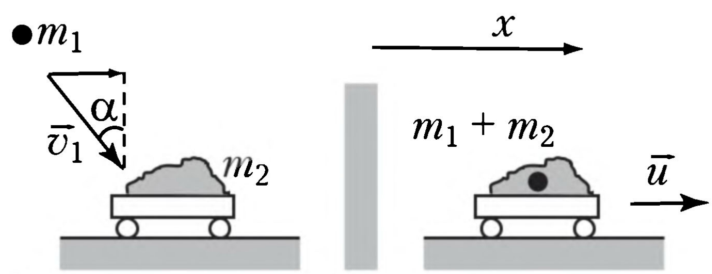
$$m_1^2 + m_1 m_2 - 12 m_2^2 = 0 .$$

Разделив это уравнение на m_2^2, получим квадратное уравнение для искомой величины $x = m_1/m_2$

$$x^2 + x - 12 = 0 .$$

Сохраняя только положительный корень, получаем $x = 3$.

Задача 12. *Снаряд массой 50 кг, летящий под углом 30° к вертикали со скоростью 600 м/с, попадает в платформу с песком и застревает в ней. Найдите скорость платформы после попадания снаряда. Масса платформы 950 кг. Трением между платформой и рельсами пренебречь.*



Система (снаряд + платформа) не является замкнутой — на нее действует как сила тяжести, так и сила реакции со стороны рельсов. В результате импульс системы при ударе меняется, но это изменение касается только вертикальной проекции импульса (она обращается в ноль). В горизонтальном направлении система является замкнутой (проекция внешних сил на это направление равна нулю — по условию трение о рельсы отсутствует), и мы можем записать закон сохранения проекции полного импульса на ось x

$$m_1 v_1 \sin\alpha = (m_1 + m_2) u ,$$

откуда находим искомую конечную скорость

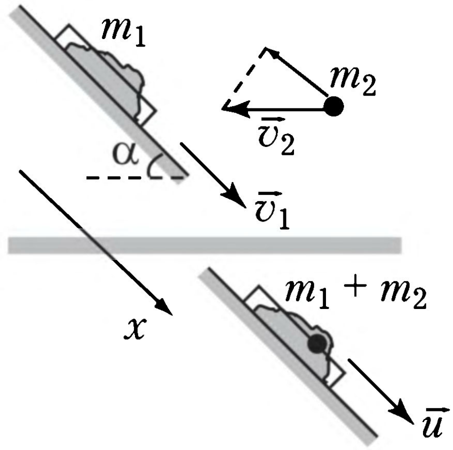
$$u = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{(m_1 + m_2)} = 15 \text{ м/с}.$$

Задача 13. *В ящик с песком массой 9 кг, соскальзывающий с гладкой наклонной плоскости, попадает горизонтально летящее ядро массой 3 кг и застревает в нем. Найдите скорость ящика сразу же после попадания ядра, если непосредственно перед попаданием скорость ящика равнялась 6 м/с, а скорость ядра 12 м/с. Угол наклона плоскости к горизонту 60°.*

Полный импульс системы (ящик + ядро) не сохраняется. Важно правильно определить направление, в проекции на которое можно записать закон сохранения импульса. Ответ можно дать только в предположении, что время соударения очень мало (стремится к нулю). Тогда можно пренебречь изменением импульса за счет силы тяжести: $m\vec{g}\Delta t \to 0$. Единственной внешней силой, действием которой пренебречь нельзя, остается сила нормальной реакции со стороны наклонной плоскости. Если направить ось x вдоль плоскости, то проекция силы реакции на эту ось обратится в ноль, т. е. проекция импульса системы на это направление сохраняется

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos\alpha = (m_1 + m_2)u.$$

Отсюда находим конечную скорость: u = 3 м/с.



Задача 14. *Тележка стоит на гладких рельсах. Человек переходит с одного ее конца на другой параллельно рельсам. На какое расстояние относительно земли переместится при этом тележка? Масса человека 60 кг, масса тележки 120 кг, ее длина 6 м.*

Закон сохранения импульса связывает скорости человека и тележки в каждый момент времени

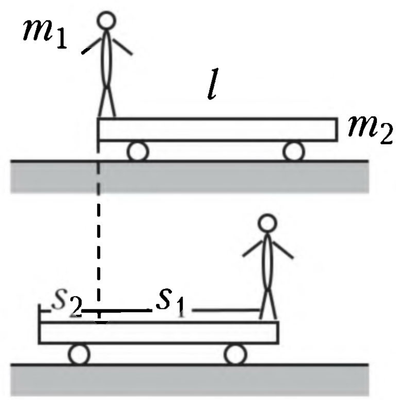
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0.$$

Умножая это равенство на время движения, найдем связь между величинами перемещений

$$m_1(l - s_2) - m_2 s_2 = 0,$$

где l — длина тележки, s_2 — ее перемещение, $(l - s_2)$ — перемещение человека. Решая уравнение, находим

$$s_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = 2 \text{ м}.$$



Замечание. Можно решить эту задачу, опираясь на свойства центра масс системы. Поскольку система замкнутая, то скорость ее центра масс не меняется, т. е. в данном случае остается равным нулю. Приравняем к нулю перемещение центра масс (см. формулу (23))

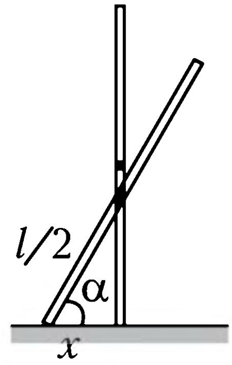
$$s_{\text{ц}x} = \frac{m_1 s_{1x} + m_2 s_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

Учитывая, что $s_{1x} = s_1 = (l - s_2)$, $s_{2x} = -s_2$, получим $m_1(l - s_2) - m_2 s_2 = 0$. При этом подходе видно, что результат не зависит от того, как человек движется.

Задача 15. *На стол поставили в вертикальном положении тонкую палочку длиной 80 см и отпустили. На сколько сантиметров сместится нижний конец палочки к тому моменту, когда она будет составлять с поверхностью стола угол 60°? Трением пренебречь.*

В отсутствие трения палочка представляет собой систему, замкнутую в горизонтальном направлении. Значит, горизонтальная проекция скорости центра масс остается равной нулю, т. е. центр палочки перемещается только по вертикали. Из рисунка находим

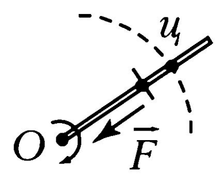
$$x = \frac{l}{2}\cos\alpha = 20 \text{ см.}$$



Задача 16. *Веревку длиной 80 см и массой 200 г положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили вокруг одного из концов с угловой скоростью 10 рад/с. Чему равна сила натяжения веревки в середине ее длины?*

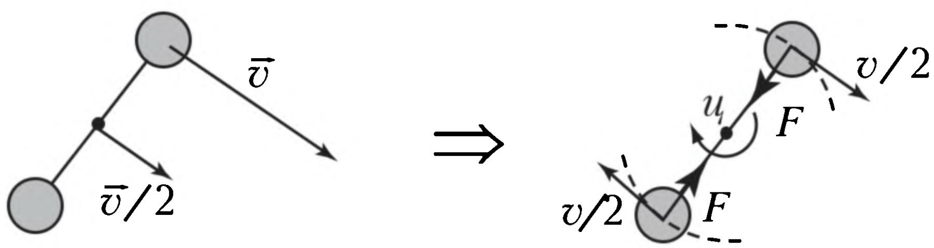
Рассмотрим движение внешней половины веревки. На нее действует только одна горизонтальная внешняя сила — сила натяжения в середине веревки. Центр масс этого участка веревки движется по окружности радиусом $(3/4)l$ (l — длина веревки), его масса равна половине массы веревки. Из уравнения движения центра масс (см. формулу (25))

$$F = \frac{m}{2}\omega^2\frac{3}{4}l$$



находим $F = 6$ Н.

Задача 17. *Два шарика массой 250 г каждый, соединенные нитью длиной 1 м, движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент один из шариков неподвижен, а скорость другого равна 4 м/с и направлена перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?*



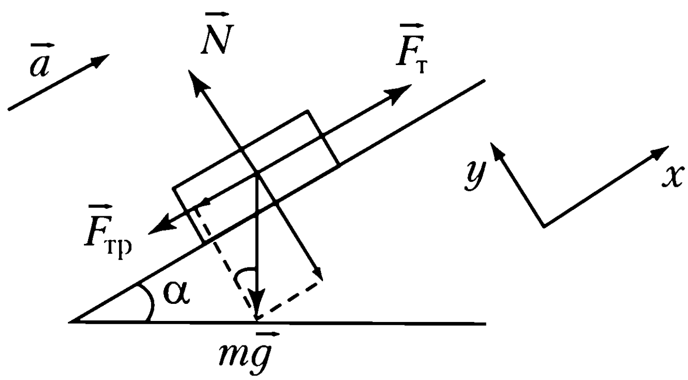
Поскольку система замкнута, центр масс системы (находящийся в середине нити) движется равномерно и прямолинейно. Его скорость можно найти из движения шариков в данный момент времени: она параллельна скорости движущегося шарика и равна половине его скорости (см. формулу (24)). Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно со скоростью центра масс. В этой СО центр масс неподвижен, а шарики движутся по окружностям радиусом $l/2$ со скоростью $v/2$. Получаем

$$F = m\frac{(v/2)^2}{l/2} = \frac{mv^2}{2l} = 2 \text{ Н.}$$

Работа и энергия

Примеры решения задач

Задача 1. *Вагонетку массой 200 кг поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту составляет 30°. Какую работу (в кДж) совершила сила тяги на пути 50 м, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением 0,2 м/с^2? Коэффициент трения 0,2, g = 10 м/с^2. $\sqrt{3}$ = 1,7.*



Так как сила тяги направлена вдоль наклонной плоскости, ее работа на пути s равна

$$A = F_т s.$$

Чтобы найти силу тяги, запишем уравнение движения в проекциях на оси x и y

$$F_т - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0$$

и формулу для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N.$$

Решив полученную систему, получим

$$F_т = ma + mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 1380 \text{ Н},$$

откуда находим работу силы тяги: A = 69 кДж.

Задача 2. *Санки массой 18 кг равномерно передвигают по горизонтальному участку дороги с помощью веревки, наклоненной под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения 0,08. Найдите работу силы натяжения на пути 100 м. g = 10 м/с^2. $\sqrt{3}$ = 1,72.*

Из второго закона Ньютона в проекциях на оси x и y

$$F_н\cos\alpha - F_{тр} = 0,$$

$$N - mg + F_н\sin\alpha = 0$$

и формулы для силы трения скольжения

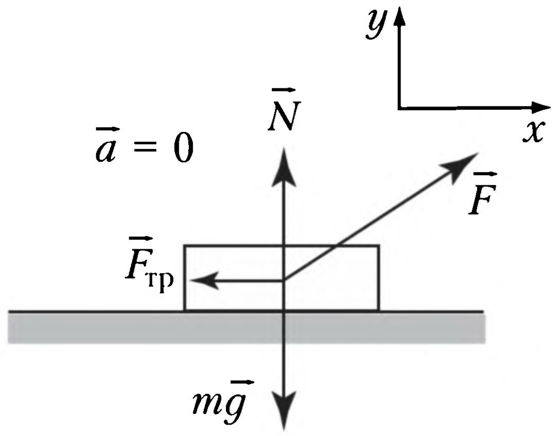
$$F_{тр} = \mu N$$

выразим силу натяжения и подставим в формулу для работы

$$A = F_{н} s \cos\alpha.$$

Получим

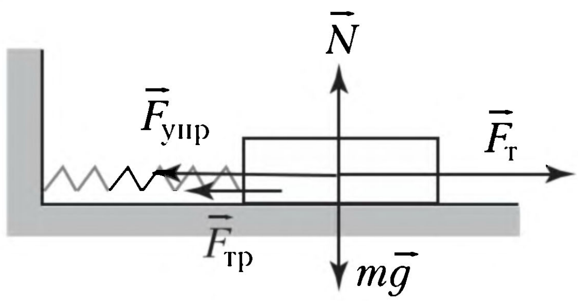
$$A = \frac{\mu mgs\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 1376 \text{ Н}.$$



Задача 3. *Ящик массой 10 кг лежит на горизонтальной поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стены, с которой он соединен пружиной жесткостью 200 Н/м. Коэффициент трения между ящиком и поверхностью 0,2. Ящик медленно отодвигают от стены на 20 см, прикладывая к нему горизонтальную силу. Какую работу при этом совершают? В начальном положении пружина не деформирована. $g = 10$ м/с^2.*

Чтобы найти силу тяги, запишем 2-ой закон Ньютона в проекциях на оси x и y

$$F_{т} - F_{тр} - F_{упр} = 0,$$
$$N - mg = 0$$



(ускорение равно нулю) и формулы для сил трения и упругости

$$F_{тр} = \mu N, \quad F_{упр} = kx.$$

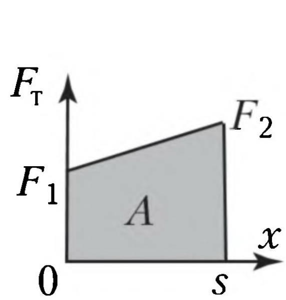
Получим, что сила тяги

$$F_{т} = \mu mg + kx$$

линейно зависит от перемещения x. В этом случае работа может быть найдена как работа средней силы

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2} s = \mu mgs + \frac{ks^2}{2} = 8 \text{ Дж}.$$

где F_1, F_2 — начальное и конечное значения силы тяги. Отметим, что работа равна сумме двух членов: работе против силы трения (выделившееся тепло) и энергии упругой деформации пружины.



Задача 4. *Нефть откачивают из скважины глубиной 500 м с помощью насоса, потребляющего мощность 10 кВт. Каков КПД (в процентах) насоса, если за одну минуту его работы на поверхность земли подается 96 кг нефти? $g = 10$ м/с^2.*

Коэффициент полезного действия равен отношению полезной работы по подъему нефти к энергии, потребленной насосом из сети за это время

$$\eta = \frac{mgh}{Pt} = 0{,}8.$$

Выразив КПД в процентах, получим $\eta = 80\%$.

Задача 5. *Грузовой состав движется по ровному участку дороги со скоростью 60 км/ч, электровоз при этом развивает полезную мощность 100 кВт. С какой скоростью (в км/ч) надо подниматься по участку с уклоном 1 м на 200 м пути, чтобы развиваемая мощность равнялась 120 кВт? Сила сопротивления равна 0,01 от силы тяжести состава.*

В первом случае полезная мощность равна

$$P_1 = F_{\text{т}1} v_1 = \mu m g v_1,$$

где $\mu = 0{,}01$ (при равномерном движении сила тяги равна силе сопротивления). Во втором случае проекция 2-го закона Ньютона на направление движения имеет вид

$$F_{\text{т}2} - \mu m g - m g \sin\alpha = 0,$$

($\sin\alpha = 1/200$), и для мощности получаем

$$P_2 = F_{\text{т}2} v_2 = (\mu m g + m g \sin\alpha) v_2.$$

Разделив P_2 на P_1, выразим v_2

$$v_2 = \frac{P_2}{P_1} \frac{\mu}{\mu + \sin\alpha} v_1 = 48 \text{ км/ч}.$$

Задача 6. *Автомобиль массой 1 т трогается с места и, двигаясь равноускоренно, проходит путь 50 м за 5 с. Какую мощность (в кВт) развивает автомобиль в конце пятой секунды своего движения? Сопротивлением движению автомобиля пренебречь.*

Мгновенное значение мощности, развиваемой силой тяги, равно

$$P = F_{\text{т}} v.$$

Силу тяги найдем из уравнения движения автомобиля

$$F_{\text{т}} = ma.$$

Ускорение определим из уравнения кинематики

$$s = \frac{at^2}{2},$$

а скорость в момент времени $t = 5$ с — из уравнения

$$s = \frac{0+v}{2}t\ .$$

Получаем

$$P = \left(m\frac{2s}{t^2}\right)\frac{2s}{t} = \frac{4ms^2}{t^3} = \text{ 80 кВт.}$$

Задача 7. *Какую среднюю полезную мощность (в кВт) развивает при разбеге самолет массой 1 т, если длина разбега 300 м, взлетная скорость 30 м/с, а сила сопротивления движению 300 Н?*

Средняя мощность силы тяги равна

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t} = \frac{F_{\text{т}}s}{t} = F_{\text{т}}v_{\text{ср}} = F_{\text{т}}\frac{v}{2},$$

где $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость. Чтобы найти силу тяги, запишем 2-ой закон Ньютона

$$F_{\text{т}} - F_{\text{ср}} = ma,$$

а ускорение найдем из уравнения

$$v^2 = 2as.$$

Получаем

$$P_{\text{ср}} = \left(m\frac{v^2}{2s} + F_{\text{с}}\right)\frac{v}{2} = 27\ \text{кВт.}$$

Задача 8. *Тело брошено с некоторой высоты горизонтально со скоростью 10 м/с. Через сколько секунд кинетическая энергия тела возрастет вдвое? $g = 10$ м/с^2.*

По условию

$$\frac{mv^2}{2} = 2\frac{mv_0^2}{2}\ .$$

Квадрат скорости выражается через горизонтальную и вертикальную проекции

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + (gt)^2$$

(см. формулу (12)). Получаем $v_0^2 + (gt)^2 = 2v_0^2$, откуда $t = v_0/g = 1$ с.

Задача 9. *Чему равна полезная мощность брандспойта, если площадь его отверстия 10 см², а скорость водяной струи 10 м/с?*

Полезная работа брандспойта за время t равна кинетической энергии воды, выброшенной за это время

$$A_{\text{пол}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Массу воды, выброшенной за время t, найдем из уравнения расхода

$$m = \rho s v t,$$

где ρ — плотность воды. Для полезной мощности получаем

$$P_{\text{пол}} = \frac{A_{\text{пол}}}{t} = \frac{1}{2}\rho s v^3 = 500 \text{ Вт}.$$

Задача 10. *Однородный стержень длиной 8 см скользит по гладкой горизонтальной поверхности параллельно своей длине и наезжает на границу, отделяющую гладкую поверхность от шероховатой, коэффициент трения о которую 0,2. Линия границы расположена перпендикулярно скорости стержня. Найдите начальную скорость (в см/с) стержня, если он остановился в тот момент, когда наполовину пересек границу. g = 10 м/с².*

В тот момент, когда на шероховатую поверхность заехал отрезок стержня длиной x, сила трения равна $F_{\text{тр}}(x) = \mu m g (x/l)$. Значит, сила трения линейно зависит от перемещения, и работу можно вычислять по формуле

$$A_{\text{тр}} = -\frac{F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}}{2} s = -\frac{0 + \mu m g/2}{2} \frac{l}{2} = -\frac{\mu m g l}{8}.$$

Применяя теорему о кинетической энергии

$$A_{\text{тр}} = 0 - \frac{m v_0^2}{2},$$

находим начальную скорость $v_0 = \sqrt{\mu g l}/2 = 20$ см/с.

Задача 11. *На сколько изменится потенциальная энергия бруска массой 200 кг, если его перевести из горизонтального положения в вертикальное? Брусок имеет квадратное сечение со стороной 20 см и длину 1 м. g = 10 м/с².*

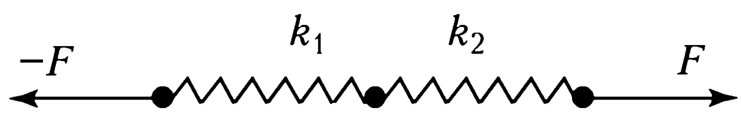
Формулу $E_{\text{п}} = mgh$ можно применять для расчета потенциальной энергии протяженного тела, но под h надо понимать высоту, на которой расположен центр тяжести этого тела. Для изменения потенциальной энергии бруска получаем

$$\Delta E = mg\frac{l}{2} - mg\frac{a}{2} = 800 \text{ Дж},$$

где l — длина бруска, a — сторона квадрата в сечении бруска.

Задача 12. *Две пружины, жесткости которых 3 кН/м и 2 кН/м, соединили последовательно и растянули за концы на 10 см. Какую при этом совершили работу?*

Работа равна изменению потенциальной энергии пружин. В случае последовательного соединения деформация составной пружины равна сумме деформаций: $x = x_1 + x_2$, а сила упругости для двух пружин одинакова: $k_1 x_1 = k_2 x_2$. Из этих уравнений находим деформацию каждой пружины



$$x_1 = \frac{k_2 x}{k_1 + k_2}, \qquad x_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2}$$

и вычисляем потенциальную энергию

$$E_п = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\frac{x^2}{2} = 6 \text{ Дж}.$$

Задача 13. *Тонкая пластинка массой 10 кг лежит на горизонтальном столе. В центре пластинки укреплена легкая пружинка жесткостью 100 Н/м. Какую работу надо совершить, чтобы на пружине поднять пластинку на высоту 1 м от поверхности стола? g = 10 м/с^2.*

В данном случае работу удобно рассчитывать исходя не из ее определения, а из связи между работой и изменением энергии

$$A = E_2 - E_1 = \left(mgh + \frac{kx^2}{2}\right) - 0$$

(кинетическая энергия остается равной нулю). Деформацию пружинки найдем из условия равновесия пластинки

$$mg - kx = 0.$$

Получаем

$$A = mgh + \frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = 150 \text{ Дж}.$$

Задача 14. *Груз висит на пружине жесткостью 60 Н/м. Какую надо совершить работу (в мДж), чтобы растянуть пружину еще на 2 см?*

Работа по растяжению пружины равна изменению потенциальной энергии, которая содержит два слагаемых: потенциальную энергию силы тяжести и потенциальную энергию упругой деформации:

$$A = \left[\frac{k(x + x_0)^2}{2} - \left(mgx + \frac{kx_0^2}{2}\right)\right]$$

где x_0 — начальная деформация, x — дополнительное растяжение, а потенциальная энергия силы тяжести отсчитывается от конечного положения. После упрощения (с учетом соотношения $mg - kx_0 = 0$) получим

$$A = \frac{kx^2}{2} = 12 \text{ мДж.}$$

Замечание. Бросается в глаза, что конечное выражение для потенциальной энергии содержит только один член: энергию упругой деформации, но отсчитанную от положения равновесия (где пружина уже растянута на x_0). Дело в том, что в этом состоянии равнодействующая сил тяжести и упругости равна нулю, а при отклонении на x становится равной $F_p = -kx$ (сила тяжести не меняется, а сила упругости изменяется на $-kx$). Следовательно, обе силы вместе эквивалентны одной силе упругости, в которой деформация x отсчитывается от положения равновесия. Это наблюдение оказывается очень удобным при решении задач.

Задача 15. *Тело брошено под углом к горизонту с высоты 10 м над поверхностью земли со скоростью 20 м/с. Чему будет равна его скорость на высоте 25 м? g = 10 м/с^2.*

Искомую скорость можно найти из закона сохранения энергии

$$mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2} = mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2}.$$

Получаем

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g(h_1 - h_0)} = 10 \text{ м/с.}$$

Так как кинетическая энергия зависит только от величины скорости, то угол, под которым бросили тело, в ответ не вошел.

Задача 16. *Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости, если он висит на жестком невесомом стержне длиной 0,4 м? g = 10 м/с^2.*

Для груза на жестком стержне минимальная энергия груза соответствует случаю, когда верхняя точка проходится им с почти нулевой скоростью ($v_2 = 0$). Принимая потенциальную энергию равной нулю в нижней точке окружности, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = mg(2l),$$

откуда находим скорость в нижней точке: $v_1 = \sqrt{4gl} = 4$ м/с.

Задача 17. *К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью 400 Н/м прикрепили груз массой 250 г и без толчка отпустили. Определите максимальную скорость (в см/с) груза. g = 10 м/с^2.*

Скорость груза будет максимальной в тот момент, когда равно нулю его ускорение, т. е. выполняется уравнение

$$mg - kx = 0.$$

Принимая потенциальную энергию силы тяжести равной нулю в этой точке, запишем закон сохранения энергии

$$mgx = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = g\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} = 25 \text{ см/с}.$$

Задача 18. *Груз массой 1,6 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 250 Н/м. Грузу резким толчком сообщают начальную скорость 1 м/с, направленную вертикально вверх. На какое максимальное расстояние (в мм) поднимется груз? g = 10 м/с^2.*

Рассмотрим сначала более простой случай: будем считать, что груз висит не на шнуре, а на пружине. В этом случае проще всего записать закон сохранения энергии, объединяя вместе силы тяжести и упругости (см. реш. 14):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}, \qquad \text{т.е.} \qquad x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = 80 \text{ мм}.$$

где x — максимальное отклонение от положения равновесия. Отличие шнура от пружины состоит в том, что сила упругости возникает в нем только при растяжении. Поэтому, если груз поднимется на $x_0 = mg/k$ (где деформация шнура обратится в ноль) и будет двигаться дальше, то на него будет действовать только сила тяжести. Выясним, при какой начальной скорости v_1 груз достигнет этой «критической точки» и остановится. Для этого подставим в написанное выше уравнение $x = x_0$ и получим

$$v_1 = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = g\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

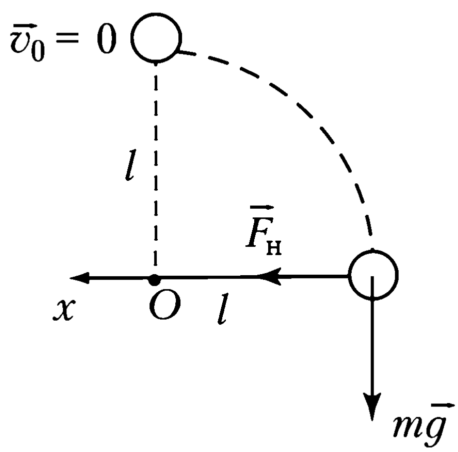
В нашем случае $v_0 > v_1$, решение, записанное для пружины, оказывается неверным, и задачу надо решать заново. В этой ситуации удобно не объединять силы тяжести и упругости, а рассматривать их по отдельности. Отсчитывая потенциальную энергию силы тяжести от начального положения, запишем

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = mgx,$$

откуда, с учетом $x_0 = mg / k$, находим

$$x = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{mg}{2k} = 82 \text{ мм}.$$

Задача 19. *Легкий стержень с грузом массой 0,2 кг на одном конце может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через другой конец. Сначала груз удерживают в верхнем положении (стержень вертикален), а затем отпускают. Чему равно натяжение стержня в тот момент, когда он проходит горизонтальное положение? $g = 10$ м/с^2.*



Чтобы найти натяжение стержня, запишем 2-ой закон Ньютона в проекции на ось x, направленную от груза к центру окружности

$$F_н = \frac{mv^2}{l}.$$

Квадрат скорости найдем из закона сохранения энергии

$$mgl = \frac{mv^2}{2}$$

(высота отсчитывается от точки подвеса стержня). Получаем $F_н = 2mg = 4$ Н.

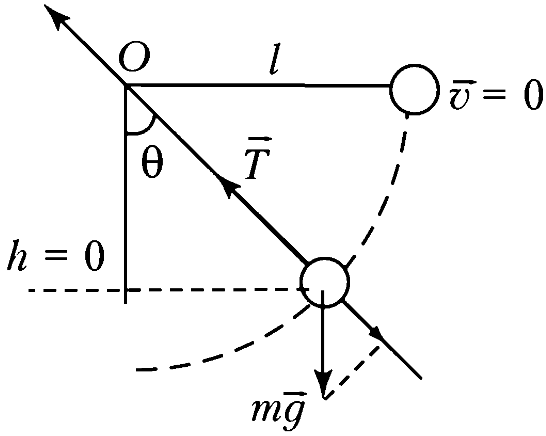
Задача 20. *Маленький шарик массой 0,2 кг находится на конце нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости. Чему равна сила натяжения нити в тот момент, когда она составляет угол 60° с вертикалью? $g = 10$ м/с^2.*

Запишем 2-ой закон Ньютона в проекции на ось, проведенную от тела к центру окружности, по которой движется тело

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l},$$

где l — длина нити. Вторым уравнением, которое позволяет учесть, что начальная скорость равна нулю, является закон сохранения энергии

$$mgh + 0 = 0 + \frac{mv^2}{2}$$

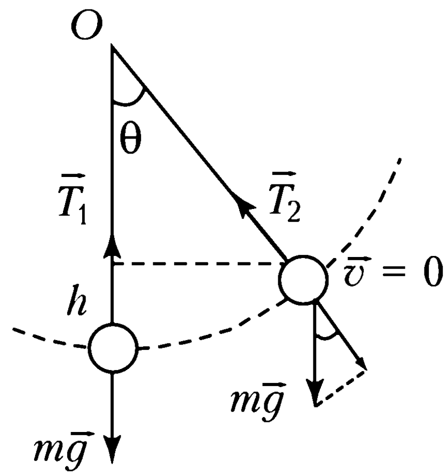


(высота отсчитывается от нижнего из двух положений шарика). Высота в верхнем положении равна $h = l\cos\theta$. Выразив v^2 из второго уравнения и подставив в первое, получим

$$T = 3mg\cos\theta = 3\text{ Н}.$$

Задача 21. *На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шарик. На какой угол (в градусах) надо отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была бы в 4 раза больше минимальной?*

Силы натяжения нити в нижней и крайней точках выразим из 2-го закона Ньютона, записанного в каждой точке в проекции на ось, проведенную к центру



$$T_1 - mg = \frac{mv^2}{l}, \quad T_2 - mg\cos\theta = 0$$

(при приближении к крайней точке центростремительное ускорение стремится к нулю). Квадрат скорости в нижней точке найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\theta)$$

(высота отсчитывается от нижнего положения шарика). Получаем

$$T_1 = mg(3 - 2\cos\theta), \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{3 - 2\cos\theta}{\cos\theta},$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{3}{T_1/T_2 + 2} = \frac{1}{2}, \qquad \theta = 60°.$$

Задача 22. *Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости, если он висит на легкой нерастяжимой нити длиной 2 м? $g = 10$ м/с^2.*

В отличие от разобранной выше задачи (см. реш. 16), здесь шарик подвешен не на стержне, а на нити. Это изменяет условие для минимальной энергии, необходимой для прохождения полного оборота. Энергию можно уменьшать до тех пор, пока нить натянута во всех точках окружности. Поскольку самое маленькое натяжение в верхней точке окружности (докажите это), то при минимальной энергии натяжение в верхней точке равно нулю. Скорость v_2 в верхней точке найдем из 2-го закона Ньютона (в проекции на ось, направленную вниз, к центру окружности)

$$mg = \frac{mv_2^2}{l},$$

а скорость v_1 — из закона сохранения энергии

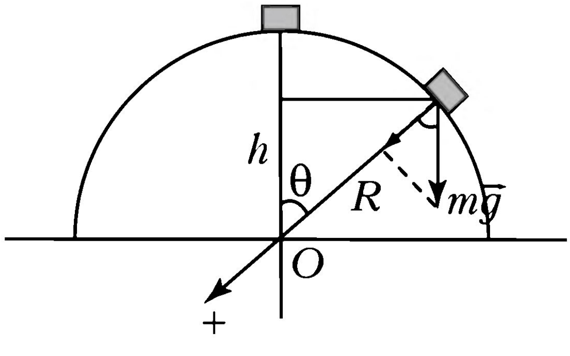
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg(2l)$$

(высота отсчитывается от нижней точки окружности). Получаем $v_1 = \sqrt{5gl} =$ $= 10$ м/с.

Задача 23. *Небольшое тело соскальзывает без трения с вершины неподвижной полусферы радиусом 0,75 м. На какой высоте (в см) тело оторвется от поверхности полусферы? Высота отсчитывается от основания полусферы.*

В момент отрыва тело перестает давить на поверхность полусферы — обращается в ноль сила реакции и на тело действует только сила тяжести. В то же время, в этот момент движение тела можно еще считать происходящим по окружности радиусом R. Оба эти обстоятельства учитывает проекция уравнения движения на ось, проведенную вдоль радиуса от тела к центру полусферы

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R},$$



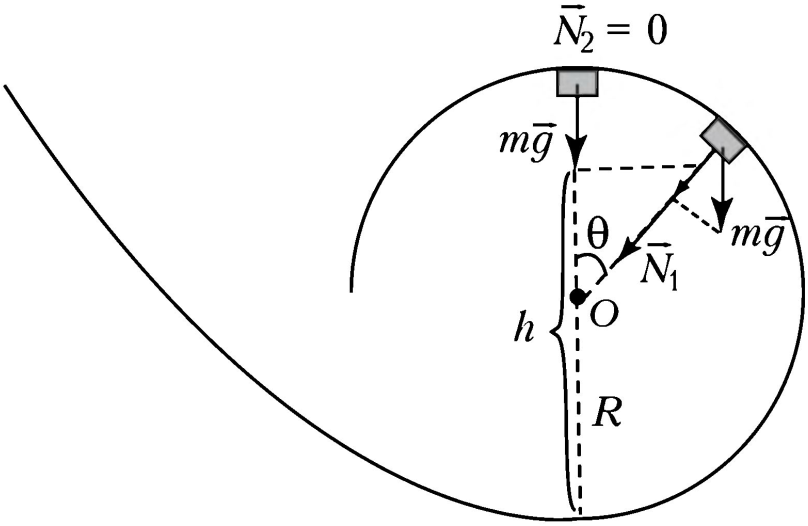
где θ — угол между этим радиусом и вертикалью. Второе уравнение получим, приравняв энергию в момент отрыва к энергии в начальный момент

$$mgR = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

(высота отсчитывается от поверхности, на которой лежит полусфера). Выражая v^2 из первого уравнения и учитывая, что $\cos\theta = h/R$, получим

$$h = \frac{2}{3}R = 50 \text{ см}.$$

Задача 24. *Небольшая тележка описывает в вертикальной плоскости «мертвую петлю» радиусом 2 м, скатываясь с минимальной высоты, обеспечивающей прохождение всей петли. На какой высоте от нижней точки петли сила давления тележки на рельсы равна 3/2 силы тяжести тележки? Трением пренебречь.*



При минимальной энергии, обеспечивающей прохождение всей петли, сила нормальной реакции в верхней точке обращается в ноль (см. реш. 22). Запишем 2-ой закон Ньютона в проекции на радиус в верхней точке и в точке, где $N_1 = (3/2)mg$

$$mg = m\frac{v_2^2}{R}, \quad mg\cos\theta + N_1 = m\frac{v_1^2}{R}.$$

Приравняем механическую энергию в указанных точках — на высоте $2R$ и на искомой высоте $h = R(1+\cos\theta)$

$$mg(2R) + \frac{mv_2^2}{2} = mg(R + R\cos\theta) + \frac{mv_1^2}{2}.$$

Подставив сюда квадраты скоростей, получим $\cos\theta = 1/2$, откуда $h = (3/2)R = 3$ м.

Задача 25. *Шар массой 2 кг, имеющий скорость 6 м/с, абсолютно упруго сталкивается с неподвижным шаром массой 1 кг. Найдите скорость второго шара после удара, считая его центральным.*

В случае упругого удара кроме импульса системы сохраняется также ее механическая энергия. Запишем оба закона сохранения

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$
$$m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_2$$

и сгруппируем члены так, чтобы все, что относится к первому телу, было слева от знака равенства

$$m_1\left(v_1^2 - u_{1x}^2\right) = m_2 u_2^2 ,$$

$$m_1(v_1 - u_{1x}) = m_2 u_2.$$

Если мы поделим уравнения друг на друга, то получим простое уравнение

$$v_1 + u_{1x} = u_2,$$

которое вместе с законом сохранения импульса образует систему двух *линейных* уравнений с двумя неизвестными. (При делении уравнений мы, с точки зрения математики, отбросили неинтересное для нас решение начальной системы уравнений: $u_{1x} = v_1$, $u_2 = 0$.) Решив эту систему, получим

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 , \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 .$$

Отметим, что

а) ответ зависит только от *отношения* масс шаров;

б) если налетающий шар массивнее ($m_1/m_2 > 1$), он после удара продолжает движение вперед, если легче — откатывается назад, если той же массы — останавливается.

Подставляя численные данные, находим $u_2 = 8$ м/с.

Задача 26. *Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров шар большей массы покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял 3/4 своей кинетической энергии. Во сколько раз масса одного шара больше, чем другого*?

Запишем законы сохранения энергии и импульса (с учетом знаков)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} ,$$

$$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Лучше всегда начинать с упрощения этой системы способом, описанным в предыдущей задаче (иногда можно обойтись без этого — попробуйте сами решить эту задачу по-другому). В результате приходим к системе линейных уравнений

$$v_1 - u_1 = u_2,$$

$$m_1(v_1 + u_1) = m_2 u_2.$$

Если первый шар потерял 3/4 своей энергии, то у него осталась 1/4

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = \frac{1}{4}\frac{m_1 v_1^2}{2},$$

откуда получаем соотношение между скоростями

$$u_1 = \frac{v_1}{2}$$

(важно, что знак уже учтен и $u_1 > 0$!). Подставив это выражение в систему и приведя подобные члены, получим

$$\tfrac{1}{2} v_1 = u_2,$$

$$m_1\left(\tfrac{3}{2} v_1\right) = m_2 u_2.$$

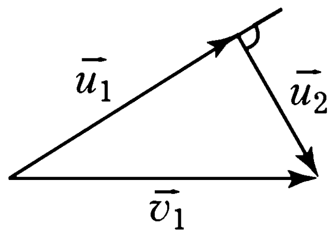
Поделив второе уравнение на первое, получим

$$3m_1 = m_2,$$

т. е. отношение масс равно 3.

Задача 27. *Альфа-частица после абсолютно упругого столкновения с неподвижным ядром гелия движется в направлении, образующем некоторый угол с первоначальным направлением. Определите угол (в градусах) под которым разлетаются частицы после столкновения.*

Так как альфа-частица — такое же ядро атома гелия (полученное при альфа-распаде), то надо рассмотреть упругий нецентральный удар двух одинаковых частиц. Законы сохранения для такого удара имеют вид



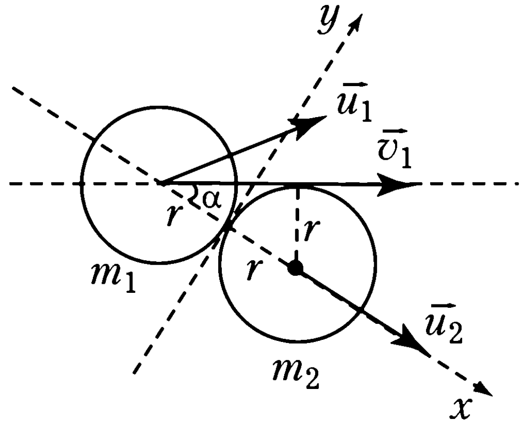
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}, \qquad m\vec{v}_1 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2.$$

Изобразим закон сохранения импульса (после сокращения m) на рисунке. Из закона сохранения энергии следует, что стороны треугольника скоростей подчиняются теореме Пифагора. Значит, угол между скоростями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ равен 90°.

Задача 28. *Шар массой 70 г покоится, а другой шар такого же размера, но массой 150 г налетает на него со скоростью 44 см/с так, что скорость его центра лежит на касательной к поверхности неподвижного шара. Найдите скорость (в см/с) налетавшего шара после абсолютно упругого удара. Поверхности шаров гладкие.*

В данном случае удобнее решать задачу не в векторном виде, а проектировать закон сохранения импульса на определенным образом выбранные оси. Ось

x направим вдоль линии центров шаров в момент удара, а ось y — перпендикулярно ей, по касательной к поверхностям шаров в точке касания. Из рисунка видно, что ось x направлена под углом $\alpha = 30°$ к начальной скорости $\vec{v}_1$ налетающего шара. Поскольку поверхности шаров гладкие, между шарами во время удара действуют только силы нормальной реакции, направленные вдоль линии центров шаров.



Это значит, что, во-первых, скорость $\vec{u}_2$ покоившегося шара направлена вдоль оси x и, во-вторых, что проекция скорости налетающего шара на ось y сохраняется: $u_{1y} = v_{1y}$.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x

$$m_1 v_{1x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_2$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2)}{2} = \frac{m_1(u_{1x}^2 + u_{1y}^2)}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Поскольку $v_{1y} = u_{1y}$, это уравнение принимает вид

$$\frac{m_1 v_{1x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Видно, что это уравнение вместе с законом сохранения импульса точно такие же, как в случае центрального удара, если налетающий шар имел бы скорость v_{1x}. Такую задачу мы решили чуть выше (см. реш. 25) и получили ответы

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \qquad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}.$$

Скорость налетающего шара после удара равна

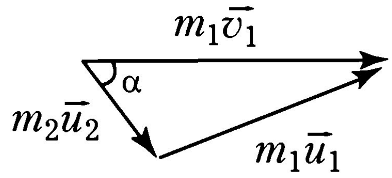
$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = v_1 \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 26 \text{ см/с}$$

(мы учли, что $v_{1x} = v_1 \cos\alpha$, $u_{1y} = v_{1y} = v_1 \sin\alpha$).

Замечание. Задачу можно решать и векторным способом. На рисунке изображен треугольник, соответствующий закону сохранения импульса. Запишем для него теорему косинусов

$$m_1^2 u_1^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 u_2^2 - 2(m_1 v_1)(m_2 u_2)\cos\alpha,$$

где a = 60° — угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{u}_2$. Решая это уравнение совместно с законом сохранения энергии, найдем сначала u_2 (исключив u_1^2), а затем и u_1. Проделайте вычисления сами и убедитесь, что получается такой же ответ.



Задача 29. *Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние 1,25 м, сталкивается абсолютно упруго с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью 2,5 м/с. На какую высоту подпрыгнет шарик после удара? g = 10 м/с².*

Направим ось координат вертикально вверх. Скорость шарика перед ударом равна $v_{1y} = -\sqrt{2gh_1} = -5$ м/с, скорость плиты $v_{2y} = 2{,}5$ м/с. Упругий удар о тяжелую плиту удобно рассмотреть в системе отсчета, в которой плита не движется — при ударе о неподвижную плиту шарик отскочит с той же скоростью. Скорость шарика в этой системе отсчета равна

$$(v_{12})_y = v_{1y} - v_{2y} = -\sqrt{2gh_1} - v_2 = -7{,}5 \text{ м/с}.$$

В результате удара скорость шарика относительно плиты изменит знак

$$(u_{12})_y = -(v_{12})_y = \sqrt{2gh_1} + v_2 = 7{,}5 \text{ м/с}.$$

Теперь вернемся в неподвижную систему отсчета

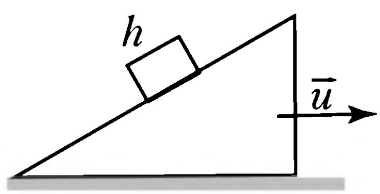
$$u_{1y} = (u_{12})_y + v_{2y} = \sqrt{2gh_1} + 2v_2 = 10 \text{ м/с}$$

и вычислим высоту, на которую подпрыгнет шарик

$$h_2 = \frac{u_{1y}^2}{2g} = 5 \text{ м}.$$

Задача 30. *Гладкий клин стоит на гладком столе. На какую высоту (в см) от поверхности стола поднимется маленький брусок, наезжающий на клин со скоростью 2 м/с? Масса клина 8 кг, масса бруска 2 кг. g = 10 м/с². Считать, что брусок заезжает на клин плавно, без удара.*

В тот момент, когда брусок достигнет максимальной высоты, его скорость относительно клина обратится в ноль, т. е. в этот момент брусок и клин будут двигаться как одно целое с некоторой скоростью u.



Так как система брусок-клин замкнута в проекции на горизонтальное направление, то горизонтальная проекция импульса системы сохраняется

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u.$$

Выразив отсюда скорость u, подставим ее в закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = (m_1 + m_2)\frac{u^2}{2} + m_1 g h$$

и найдем искомую высоту

$$h = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_1^2}{2g} = 16 \text{ см}.$$

Задача 31. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 100 г и 400 г, соединенные недеформированной пружиной. Первому бруску сообщают скорость 10 м/с в направлении второго бруска. Найдите максимальную скорость второго бруска в процессе дальнейшего движения.*

Перед тем, как записать законы сохранения энергии и импульса, выясним, в какой момент скорость второго бруска будет максимальной. Когда первому бруску сообщают скорость v_1 в направлении второго бруска, расстояние между ними начинает уменьшаться, и пружина приходит в сжатое состояние. Возникшая сила упругости приводит в движение второй брусок, и его скорость увеличивается до тех пор, пока сила упругости действует в том же направлении, т. е. пока пружина остается в сжатом состоянии. Когда пружина перейдет в растянутое состояние, то сила упругости изменит направление, и скорость второго бруска начнет уменьшаться. Следовательно, скорость второго бруска будет максимальной в тот момент, когда пружина окажется в недеформированном состоянии ($x_2 = 0$). Поскольку в начальный момент она также была не деформирована ($x_1 = 0$), то энергия упругой деформации не входит в уравнения:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_2$$

Эти уравнения имеют точно такой же вид, как и для случая упругого удара шаров (см. реш. 25). Решая систему описанным там способом, находим максимальную скорость второго бруска:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 4 \text{ м/с}.$$

Замечание 1. Приведенная система уравнений имеет два решения, одно из которых ($u_{1x} = v_1$, $u_2 = 0$) в случае упругого удара (реш. 25) отбрасывается, так как соответствует сохранению начальных значений, т.е. отсутствию удара. Однако в данной задаче это решение представляет интерес, так как оно реализуется в тот момент, когда пружина в следующий раз станет недеформированной (после того, как она была в растянутом состоянии). При дальнейшем движении скорость второго бруска будет через раз возрастать до 4 м/с и уменьшаться до нуля.

Замечание 2. Приведенная система уравнений позволяет также найти минимальную скорость первого бруска, однако только в том случае, когда его скорость не меняется по направлению, т.е. когда $m_1 > m_2$ (в этом случае $u_{1x} > 0$, см. реш. 25).

Задача 32. *Шарик массой 100 г свободно падает с высоты 2 м на стальную плиту и подпрыгивает до высоты 1 м. Определите энергию, потерянную в виде тепла при ударе. Сопротивлением воздуха пренебречь.* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Запишем закон сохранения энергии (с учетом перехода механической энергии во внутреннюю, т. е. в теплоту)

$$E_1 = E_2 + Q,$$

где $E_1 = mgh_1$ — начальная, а $E_2 = mgh_2$ — конечная механическая энергия, Q — приращение внутренней энергии (количество теплоты). Получаем $Q = 1$ Дж.

Задача 33. *С высоты 15 м над поверхностью земли вертикально вниз брошен мяч массой 500 г со скоростью 10 м/с. Мяч упал на поверхность земли со скоростью 16 м/с. Определите абсолютную величину работы, совершаемой силой сопротивления воздуха при движении мяча.* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Работа силы сопротивления равна изменению механической энергии

$$A_c = \frac{mv_2^2}{2} - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1\right) = -36 \text{ Дж}.$$

Абсолютное значение работы силы сопротивления равно 36 Дж.

Замечание. Эту величину часто называют работой *по преодолению* силы сопротивления (или работой *против* силы сопротивления). Кроме того, она равна количеству теплоты, выделившейся в системе (приращению внутренней энергии).

Задача 34. *По наклонной доске, образующей угол 30° с горизонтом, начинает скользить тело массой 2 кг. Сколько теплоты выделилось за счет трения на отрезке пути 1,8 м, если в конце этого отрезка скорость тела равна 3 м/с?* $g = 10$ *м/с*^{2}.

В этой задаче количество теплоты проще найти из баланса энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + Q,$$

где $h = s \cdot \sin\alpha$. Получаем $Q = 9$ Дж.

Задача 35. *Брусок массой 5 кг втягивают за привязанную к нему веревку на высоту 1 м по доске, угол наклона которой к горизонту составляет 45°. Веревка расположена параллельно доске. Коэффициент трения бруска о доску 0,3. Найдите энергию, которая идет на нагревание доски и бруска. $g = 10$ м/с^2.*

В данной задаче самый простой путь для расчета выделившейся в системе теплоты — найти величину работы силы трения

$$Q = F_{тр}s = F_{тр}\frac{h}{\sin\alpha}.$$

Силу трения скольжения найдем по формулы для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

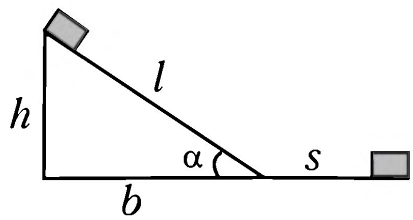
а силу нормальной реакции — из проекции 2-го закона Ньютона на ось, перпендикулярную к плоскости

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Окончательно получаем

$$Q = \mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 15 \text{ Дж}.$$

Задача 36. *С горки высотой 2 м и длиной основания 5 м съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтально некоторый путь от основания горы. Чему равен этот путь, если коэффициент трения на всем пути 0,05?*



За время движения начальная механическая энергия целиком превращается в теплоту (конечная энергия равна нулю). Так как количество выделившейся в системе теплоты равно абсолютной величине работы силы трения, получаем

$$mgh = F_{тр1} \cdot l + F_{тр2} \cdot s,$$

где $F_{тр1} = \mu N_1$ — сила трения на наклонной плоскости и $F_{тр2} = \mu N_2$ — сила трения на горизонтальном участке. Из 2-го закона Ньютона находим $N_1 = mg\cos\alpha$ и $N_2 = mg$. Получаем

$$mgh = \mu mgl\cos\alpha + \mu mgs.$$

Сокращая на mg и учитывая, что $l\cos\alpha = b$ (основание наклонной плоскости), приходим к уравнению

$$h = \mu(b + s),$$

из которого находим s

$$s = \frac{h}{\mu} - b = 35 \text{ м}.$$

Задача 37. *Тело массой 3 кг, лежащее на горизонтальной плоскости, соединено с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 54 Н/м, коэффициент трения между телом и плоскостью 0,3. Какую минимальную скорость надо сообщить телу вдоль оси пружины, чтобы оно вернулось в начальную точку? g = 10 м/с^2.*

Запишем закон сохранения энергии $E_{\text{нач}} = E_{\text{кон}} + Q$ для двух этапов: движение тела вперед и назад

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \mu mgx\ , \qquad \frac{kx^2}{2} = \mu mgx\ ,$$

где x — расстояние, пройденное телом в каждом направлении. Мы учли, что конечная скорость на каждом этапе равна нулю, а количество выделившейся теплоты равно модулю работы силы трения. Выражая x из второго уравнения и подставляя в первое, находим $v_0 = \mu g\sqrt{8m/k} = 2$ м/с.

Задача 38. *Два одинаковых тела массами по 5 кг соединены недеформированной пружиной жесткостью 15 Н/м и лежат на горизонтальном полу. Какую минимальную скорость, направленную вдоль оси пружины, надо сообщить одному из тел, чтобы оно сдвинуло другое тело? Коэффициент трения для каждого тела 0,1. g = 10 м/с^2.*

Минимальная начальная скорость первого тела, при которой второе тело сдвинется с места, соответствует случаю, когда это произойдет перед самой остановкой. Значит, в момент остановки первого тела должна достигнуть максимального значения сила трения покоя, действующая на второе тело

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg.$$

Такой же величины будет действующая на него в этот момент сила упругости (второе тело покоится!)

$$kx = \mu mg,$$

откуда можно выразить удлинение пружины

$$x = \frac{\mu m g}{k}.$$

Чтобы понять, при какой начальной скорости первое тело остановится, пройдя расстояние x, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{k x^2}{2} + (\mu m g) x,$$

где последний член — количество выделившейся теплоты, равное модулю работы силы трения. Подставляя сюда x и решив уравнение, получим

$$v_0 = \mu g \sqrt{\frac{3m}{k}} = 1 \text{ м/с}.$$

Задача 39. *На гладком полу лежит брусок массой 100 г, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 250 Н/м. На брусок начинает действовать постоянная сила 4 Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную скорость (в см/с) бруска.*

Изменение механической энергии равно работе внешней силы:

$$\left(\frac{m v^2}{2} + \frac{k x^2}{2}\right) - 0 = F x$$

Далее можно поступить двояко. Можно выразить кинетическую энергию как функцию перемещения x и найти максимум этого выражения (для этого даже не обязательно знать производную, достаточно уметь находить вершину параболы). Пройдите этот путь самостоятельно, а мы поступим иначе (см. также реш. 17). В точке, где скорость бруска максимальна, его ускорение равно нулю. Записав в этой точке 2-й закон Ньютона

$$F - kx = 0,$$

выразим x и подставим в предыдущее уравнение. Получим $v = F/\sqrt{mk} = 80$ см/с.

Задача 40. *На полу лежит брусок массой 250 г, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 100 Н/м, коэффициент трения 0,4. На брусок начинает действовать постоянная сила 3 Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную деформацию (в см) пружины. g = 10 м/с^2.*

Силу трения удобно рассматривать как вторую внешнюю силу. Тогда формула для изменения механической энергии приобретает вид

$$Fx - F_{тр}x = \frac{kx^2}{2} - 0$$

(конечная скорость равна нулю). Подставляя сюда $F_{тр} = \mu mg$, получим

$$x = \frac{2(F - \mu mg)}{k} = 4 \text{ см}.$$

Замечание. Можно не причислять силу трения к внешним силам, а учесть, что ее работа равна (по модулю) приращению внутренней тепловой энергии: $\Delta E_{внутр} = Q = F_{тр}x$. Тогда формула для изменения энергии примет вид:

$$Fx = \left(\frac{kx^2}{2} + Q\right) - 0.$$

Задача 41. *На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 1 кг и 4 кг, соединенные недеформированной пружиной. Какую наименьшую постоянную силу, направленную вдоль оси пружины, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость 0,2. $g = 10$ м/с^2.*

Условие, что приложенная внешняя сила — минимальная, состоит в одновременном выполнении двух условий. Первое — растяжение пружины достигает значения, необходимого для смещения бруска m_2,

$$kx = \mu m_2 g$$

(сила трения покоя, равная силе упругости, достигает максимального значения). В тот же момент первое тело должно остановиться (второе условие), что можно учесть с помощью формулы для изменения механической энергии $A_{вн} + A_{тр} = \Delta E$

$$Fx - (\mu m_1 g)x = \frac{kx^2}{2} - 0 .$$

Выражая x из первого уравнения и подставляя во второе, находим

$$F = \mu(m_1 + \frac{m_2}{2})g = 6 \text{ Н}.$$

Замечание. Когда система не замкнута и надо учитывать работу внешних сил, то работу силы трения тоже удобно учитывать в явном виде, а не в виде количества теплоты в обобщенном законе сохранения энергии (как в реш. 32–38).

Задача 42. *На пружине жесткостью 100 Н/м к потолку подвешен груз. На груз начинает действовать постоянная сила 6 Н, направленная вертикально вниз. Найдите максимальное перемещение (в см) груза.*

Примем за уровень отсчета потенциальной энергии силы тяжести конечную точку (где скорость обращается в ноль). Тогда формула для изменения механической энергии приобретает вид

$$Fx = \frac{k\left(x + x_0\right)^2}{2} - \left(\frac{kx_0^2}{2} + mgx\right)$$

где $x_0 = mg/k$ — начальная деформация, x — максимальное перемещение груза. После упрощения получим

$$Fx = \frac{kx^2}{2},$$

откуда $x = 2F/k$ = 12 см. Последнее уравнение можно было написать сразу, если учесть, что для равнодействующей сил тяжести и упругости потенциальная энергия имеет вид $E_п = kx^2/2$, где x отсчитывается от положения равновесия (см. реш. 14).

Задача 43. *Шары массами 1 кг и 2 кг движутся навстречу друг другу со скоростями 1 м/с и 2 м/с соответственно. Найдите, сколько теплоты выделится при неупругом ударе этих шаров.*

Запишем закон сохранения энергии с учетом выделившейся теплоты

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + Q .$$

Конечную скорость u найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Подставив u и произведя упрощения, получим

$$Q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 + v_2)^2}{2} = 3 \text{ Дж}.$$

Задача 44. *Пуля массой 20 г, летящая со скоростью 100 м/с, застревает в деревянном шаре, летящем ей навстречу со скоростью 10 м/с. Считая, что масса шара гораздо больше массы пули, найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.*

Ошибка, которую часто делают при решении этой задачи — считают, что изменением скорости очень тяжелого шара можно пренебречь, а вычислить только уменьшение энергии пули, оно-то, дескать, и будет равно количеству выделившейся теплоты. Однако такое рассуждение, очевидно, неправильно — ведь скорость тяжелого шара может быть и больше скорости пули, в этом случае скорость пули возрастет, а теплота все равно выделяется. В то же время ясен источник заблуждения — мы привыкли пренебрегать изменением энергии очень тяжелого тела — например, Земли — при рассмотрении движущихся по ней предметов. В чем же дело?

Оказывается, изменением энергии очень тяжелого тела можно пренебрегать только в том случае, если его начальная скорость равна нулю. Действительно, пусть очень тяжелое тело массой M взаимодействует с телом массой m, и в результате взаимодействия скорость легкого тела изменилась на $\Delta\vec{v}$. Изменение скорости тяжелого тела находим из закона сохранения импульса

$$m\Delta\vec{v} + M\Delta\vec{V} = 0\,.$$

При $M \to \infty$ величина ΔV стремится к нулю, но изменение энергии тяжелого тела может оставаться конечным

$$\frac{M\left(\vec{V}+\Delta\vec{V}\right)^2}{2} - \frac{M\vec{V}^2}{2} = M\vec{V}\Delta\vec{V} + \frac{M\Delta\vec{V}^2}{2} = -m\Delta\vec{v}\,\vec{V} + \frac{m}{M}\frac{m\Delta\vec{v}^2}{2}\,.$$

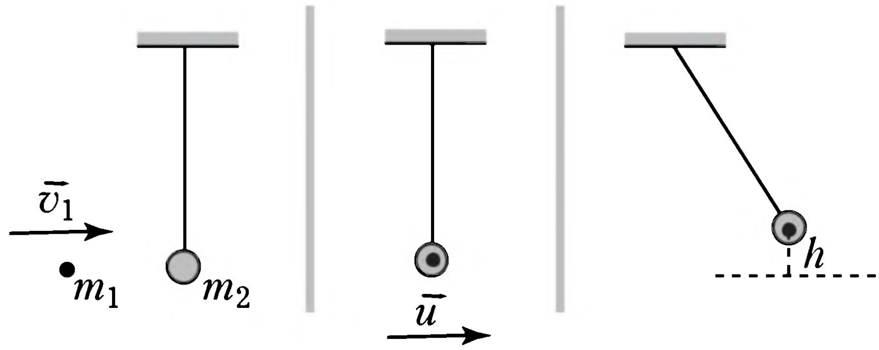
Второй член этого выражения действительно стремится к нулю в пределе бесконечно тяжелого тела. Но первый член остается конечным, и его необходимо учитывать! Однако этот член исчезает, если $\vec{V} = 0$. Значит, если начальная скорость очень тяжелого тела равна нулю, то изменением его энергии можно пренебречь. Например, при упругом ударе о движущуюся плиту шарик отскакивает с другой скоростью (см. реш. 29), т. е. энергия плиты при ударе изменяется, но в СО, связанной с плитой, шарик отскакивает с той же скоростью. Приведем общий *рецепт*: чтобы вычислить какую-нибудь величину, значение которой не должно зависеть от выбора системы отсчета (количество теплоты, выделившуюся энергию), проще всего перейти в систему отсчета, где очень тяжелое тело покоится.

В данной задаче надо перейти в систему отсчета, связанную с шаром. В этой СО начальная скорость пули равна $(v + V) = 110$ м/с, а конечная скорость пули равна нулю. Количество теплоты равно уменьшению механической энергии

$$Q = \frac{m(v+V)^2}{2} = 121 \text{ Дж.}$$

Задача 45. *В шар массой 700 г, висящий на легком стержне, попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально. Пуля застревает в шаре, после чего он поднимается на высоту 20 см от своего начального положения. Найдите скорость пули.* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Часто пытаются решить эту задачу с помощью одного закона сохранения энергии, приравнивая кинетическую энергию пули к потенциальной энергии шара с пулей в крайнем положении. Однако при неупругом ударе в системе выделяется



теплота, т. е. часть механической энергии теряется. Чтобы решить задачу, надо рассмотреть шар с пулей сразу после удара. Это промежуточное состояние связано с начальным состоянием законом сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u,$$

а с конечным — законом сохранения энергии

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh$$

(m_1 — масса пули, m_2 — масса шара). Решая эту систему уравнений, получаем

$$v_1 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh} = 142 \text{ м/с.}$$

Задача 46. *Диск массой 3 кг висит на упругом шнуре жесткостью 200 Н/м, прикрепленном к центру диска. Вдоль шнура с высоты 80 см на диск плашмя падает шайба (с отверстием в центре) массой 1 кг. На какое расстояние (в см) опустится диск после падения шайбы? Удар шайбы о диск абсолютно неупругий. $g = 10$ м/с^2.*

Скорость шайбы перед ударом о диск равна $v_1 = \sqrt{2gh}$. Скорость шайбы с диском после неупругого удара найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u.$$

Для дальнейшего движения диска с шайбой запишем закон сохранения энергии

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + (m_1 + m_2)gx + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k(x_0 + x)^2}{2},$$

где $x_0 = m_2 g/k$ — начальная деформация пружины под действием диска, x — перемещение диска с шайбой до остановки. Потенциальная энергия диска с шайбой отсчитывается от конечного положения. Упрощая и решая полученное квадратное уравнение, получаем

$$x = \frac{m_1 g}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m_1 + m_2)g}}\right) = 20 \text{ см.}$$

Замечание. Если применить прием объединения сил тяжести и упругости (см. реш. 14), то решение немного упрощается. Однако надо учесть, что уровень отсчета потенциальной энергии определяется положением равновесия не диска, а диска с шайбой. Поэтому в начале движения имеется деформация

$$y_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_1 g}{k}.$$

Закон сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + \frac{k y_0^2}{2} = \frac{k y^2}{2},$$

где y — конечное расстояние до нового положения равновесия. Вычислив y, найдем затем искомое перемещение: $x = y + y_0$.

Задача 47. *В брусок массой 10 г, лежащий на гладком столе, попадает пуля массой 2 г, летящая со скоростью 60 м/с. На сколько миллиметров углубится пуля в брусок, если сила сопротивления движению пули в бруске равна 250 Н?*

Запишем закон сохранения энергии с учетом выделившейся теплоты

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + F_c s$$

(мы учли, что количество теплоты равно абсолютному значению работы силы сопротивления). Конечную скорость бруска с пулей найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u.$$

Решив систему уравнений, найдем, на сколько углубилась пуля в брусок

$$s = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_1^2}{2F_c} = 12 \text{ мм.}$$

Замечание. Может показаться, что мы неверно вычислили работу силы сопротивления. Действительно, за s мы обозначили углубление пули, т. е. перемещение пули относительно бруска. Но поскольку за время взаимодействия сам брусок переместился на какое-то расстояние s_2, то пройденный пулей путь будет равен $s_1 = s + s_2$. Однако ошибки никакой нет. Для вычисления выделившейся теплоты надо вычислить модуль работы силы трения не только над пулей, но полной работы силы трения в системе, т. е. над пулей и над бруском. Она равна

$$A = -F_c s_1 + F_c s_2 = -F_c s.$$

Общее *правило*: в формулу для теплоты при трении двух тел должно входить относительное перемещение одного тела по другому.

Задача 48. *На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска длиной 1 м, на одном конце которой закреплен вертикальный упор. Какую минимальную скорость надо сообщить маленькому бруску, лежащему на другом конце доски, чтобы после абсолютно упругого удара об упор брусок вернулся назад и упал с доски? Масса доски в 8 раз больше, чем масса бруска, коэффициент трения между ними 0,2. $g = 10$ м/с^2.*

В этой задаче преимущества энергетического подхода очень наглядны. Ведь если решать эту задачу в лоб, надо разобрать два этапа одновременного равноускоренного движения двух тел и еще упругий удар в придачу! Мы же найдем конечную скорость доски с бруском u из закона сохранения импульса

$$mv_0 = (m + M)u,$$

(мы считаем, что в последний момент движение бруска относительно доски почти прекратилось), и запишем закон сохранения энергии с учетом выделения теплоты при трении (при упругом ударе энергия сохраняется)

$$\frac{mv_0^2}{2} = (\mu mg)2l + \frac{(M+m)u^2}{2}.$$

Получаем (с учетом $M = 8m$)

$$v_0 = \sqrt{4\mu gl\left(1+\frac{m}{M}\right)} = 3 \text{ м/с}.$$

Задача 49. *Из орудия массой 990 кг вылетает горизонтально снаряд массой 10 кг. Какая часть (в процентах) энергии, выделяющейся при взрыве пороховых газов, расходуется на откат орудия?*

В задаче предполагается, что вся выделившаяся при взрыве энергия превратится в механическую энергию снаряда и орудия

$$E_{\text{выд}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где индекс 1 обозначает снаряд, 2 — орудие. Закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

позволяет выразить скорость снаряда через скорость орудия. Нам надо определить, какую часть от $E_{\text{выд}}$ составляет кинетическая энергия орудия

$$\frac{E_{\text{оруд}}}{E_{\text{выд}}} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}01,$$

т. е. 1%. (Скорость сократилась после подстановки $v_1 = v_2 m_2 / m_1$.)

Задача 50. *Человек массой 60 кг стоит на льду рядом с санями массой 40 кг. Человек толкает сани, сообщая им скорость 3 м/с, а сам откатывается в противоположную сторону. Какую работу совершает при этом человек?*

Совершенная человеком работа равна приращению кинетической энергии системы (человек + сани)

$$A = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} .$$

Скорость человека после толчка найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0.$$

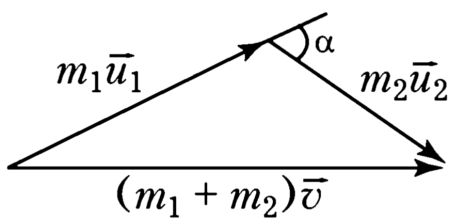
Получим

$$A = \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 300 \text{ Дж}.$$

Задача 51. *Движущийся снаряд разорвался на два осколка, угол между скоростями которых составил 60°. Один осколок имеет массу 20 кг и скорость 100 м/с, другой — массу 80 кг и скорость 25 м/с. Чему равна энергия (в кДж), выделенная при разрыве снаряда?*

Выделившаяся энергия равна разности между конечной и начальной энергиями

$$E_{\text{выд}} = \left(\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} .$$



Нам не хватает величины начальной скорости снаряда. Изобразим на рисунке векторный треугольник, соответствующий закону сохранения импульса

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 ,$$

и запишем для него теорему косинусов

$$(m_1 + m_2)^2 v^2 = m_1^2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2 - 2(m_1 u_1)(m_2 u_2)\cos(\pi - \alpha) ,$$

где α — угол между скоростями разлета осколков. Выражая отсюда v^2 и подставляя в формулу для выделившейся энергии, получаем

$$E_{\text{выд}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2 u_1 u_2 \cos\alpha}{2} = 65 \text{ кДж}.$$