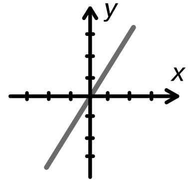
ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

В разделе рассматривается исследование функции на монотонность и экстремумы, чётность и нечётность, на периодичность, ограниченность сверху и снизу, на наибольшее и наименьшее значение функции на всей области определения.



МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОМЕЖУТКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ

Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей (убывающей) на множестве *X***, если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих множеству X, таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$, то есть большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. При движении слева направо по оси Ox график возрастающей функции идёт вверх, а убывающей — вниз.

> **!** Между промежутками возрастания (убывания) не ставится знак объединения [$\cup$]. Концы промежутков, в которых функция определена, включаются в ответ.

Если функция возрастает (убывает) на промежутке X, то говорят, что данная функция **монотонна** на промежутке X.

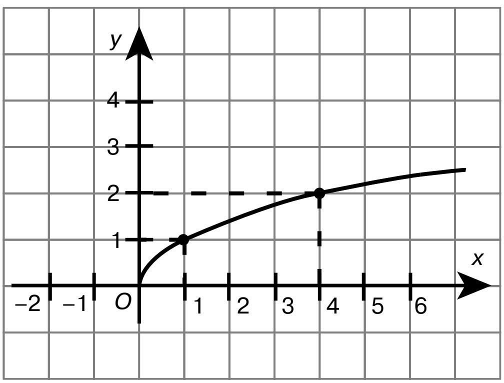


График возрастающей функции

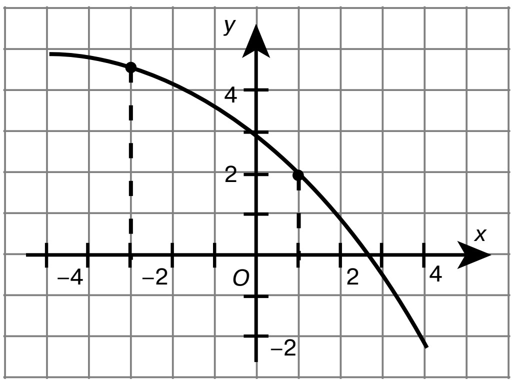
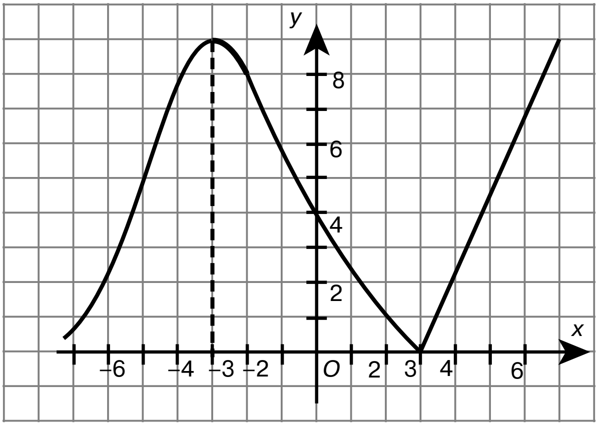


График убывающей функции

Практические задания

9 Найдите по рисунку промежутки монотонности функции $y = f(x)$.



Решение:

Движемся слева направо по оси *Ox*:

1) $(-\infty; -3]$ — график функции идёт вверх, значит, функция на данном промежутке возрастает;

2) $[-3; 3]$ — график функции идёт вниз, следовательно, на данном промежутке функция убывает;

3) $[3; +\infty)$ — график функции идёт вверх, значит, функция на данном промежутке возрастает.

Ответ: функция возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$; функция убывает на $[-3; 3]$.

ЧЁТНОСТЬ И НЕЧЁТНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функцию $y = f(x)$ на множестве X называют **чётной**, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Например.
Функция $f(x) = x^4 + 4$ является чётной, т. к. $f(-x) = (-x)^4 + 4 = x^4 + 4 = f(x)$.

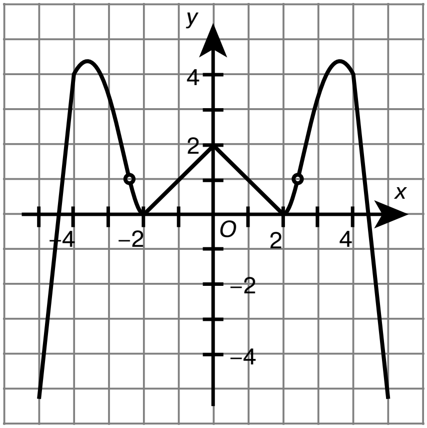


График чётной функции

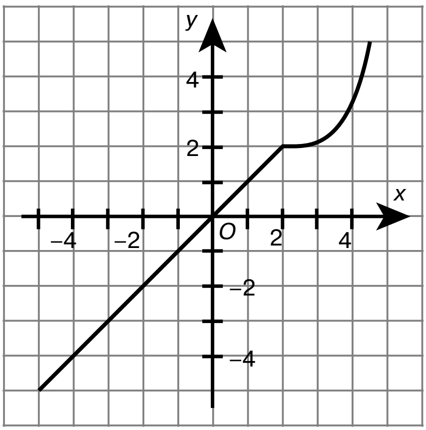


График ни чётной, ни нечётной функции

Функцию $y = f(x)$ на множестве X называют **нечётной**, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например.

Функция $f(x) = x^5 - x^3 - x$ является нечётной, т. к. $f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 - (-x) = -x^5 + x^3 + x = -(x^5 - x^3 - x) = -f(x)$.

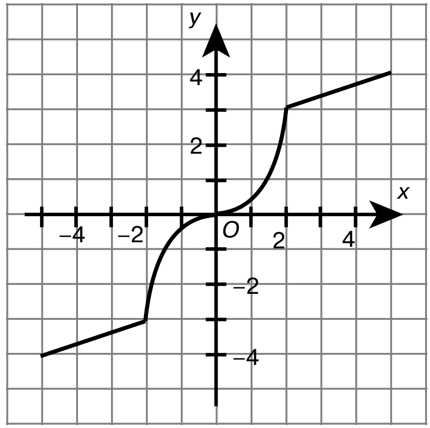


График нечётной функции

Функция может быть ни чётной, ни нечётной, в этом случае её называют **функцией общего вида**.

Если функция $y = f(x)$ чётная или нечётная, то её область определения симметрична относительно начала отсчёта. Если область определения функции не является симметричным множеством, то данная функция **не является ни чётной, ни нечётной**.

График чётной функции симметричен относительно оси *Oy*. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Если функция ни чётная, ни нечётная (функция общего вида), то её график не симметричен ни относительно начала координат, ни относительно оси ординат.

Если функция чётная (нечётная), можно построить часть графика для $x \geq 0$, а затем отразить её относительно *Oy* (начала координат).

Практические задания

10 Исследуйте функции на чётность.

а) $y=\sqrt{x-1}$; $D(f)=[1;\ +\infty)\Rightarrow$ область определения функции не является симметричным множеством, значит, функция не является ни чётной, ни нечётной.

б) $y=\sqrt{x^2-9}$;

$D(f)=(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)\Rightarrow$ область определения функции симметрична относительно начала отсчёта, значит, проверим данную функцию на чётность: $f(-x)=\sqrt{(-x)^2-9}=\sqrt{x^2-9}=f(x)$. Функция является чётной.

в) $y = x^3 - 1$.

$D(f)=(-\infty;\ +\infty)\Rightarrow$ область определения функции симметрична относительно начала отсчёта, значит, проверим данную функцию на чётность: $f(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1=-\left(x^3+1\right)\neq -f(x)\Rightarrow$ функция не является ни чётной, ни нечётной.

ПЕРИОДИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ на множестве X имеет **период T**, если для любого $x\in X$ выполняются равенства $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. В таком случае функцию $f(x)$ называют **периодической**.

Например: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\sin(x-2\pi)=$ $=-\sin(2\pi-x)=\sin x$.

Значит, функция $y = \sin x$ является периодической.

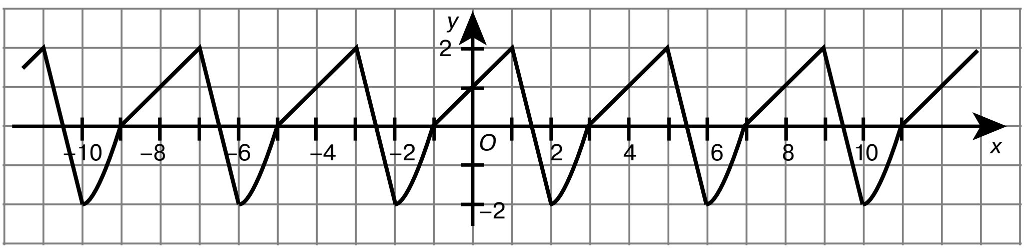


График периодической функции с основным периодом $T = 4$

Если T является периодом функции $y = f(x)$, то $2T$, $-2T$, $3T$, $-3T$, $4T$, $-4T\ldots$ также являются периодами данной функции, то есть числа вида nT, где $n \in Z$, являются периодами функции $f(x)$.

Периодическая функция имеет бесконечное множество периодов, наименьший среди положительных периодов называют **основным периодом**. Основные тригонометрические функции являются периодическими.

Например.
Функция $y = \sin x$ имеет бесконечное количество периодов $(2\pi; -2\pi; 4\pi; -4\pi\ldots)$, основным является 2π.

Если T — основной период функции $y = f(x)$, то для построения его графика достаточно построить часть графика длиной T, а затем выполнить параллельный перенос вдоль оси Ox влево и вправо на целое число периодов $(\pm T, \pm 2T, \pm 3T\ldots)$.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ФУНКЦИИ

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху (снизу)** на множестве X, если существует такое число M, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M\,[f(x) \ge M]$.

Если функция ограничена сверху и снизу на всей области определения, то данную функцию называют **ограниченной**.

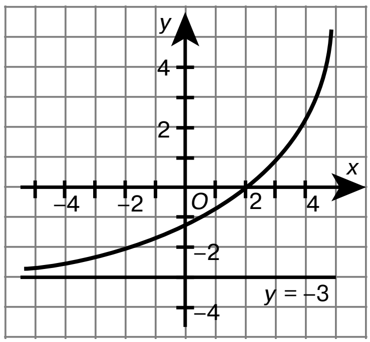


График функции, ограниченной снизу

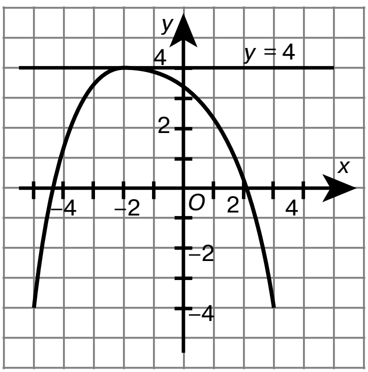


График функции, ограниченной сверху

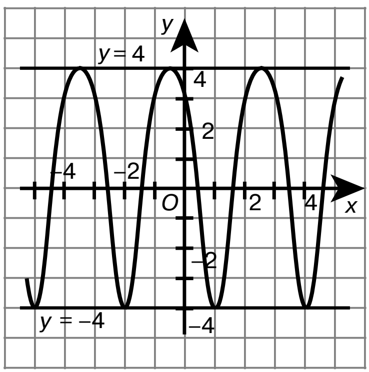


График функции, ограниченной сверху и снизу

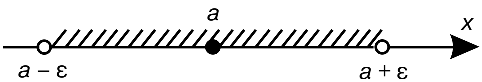
Практические задания

11 Исследуйте функцию $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$ на ограниченность.

1) $\sqrt{-x^2+4x-1}\geq 0 \Rightarrow$ данная функция ограничена снизу.

2) Графиком функции $y=-x^2+4x-1$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы $(2;\ 3)\Rightarrow -x^2+4x-1\leq$ $\leq 3 \Rightarrow \sqrt{-x^2+4x-1}\leq\sqrt{3}\Rightarrow$ данная функция ограничена сверху.

ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА



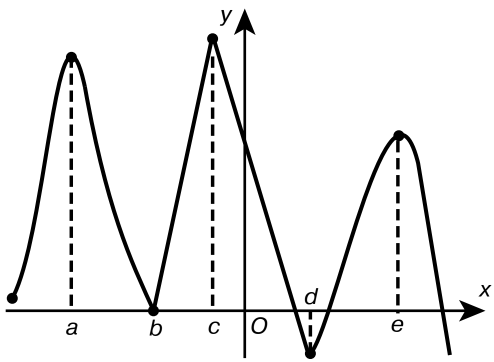
Интервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ называют **окрестностью точки *a***, число ε — **радиусом окрестности**.

Точку x_0 называют **точкой максимума (минимума)** функции $y=f(x)$, если у данной точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство $f(x_0)>f(x)$ $\left[f(x_0)<f(x)\right]$.

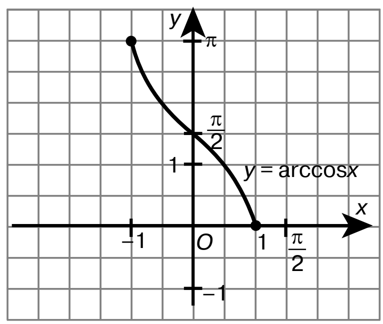
На представленном графике *a*, *c*, *e* — точки максимума, *b*, *d* — точки минимума.

Точки максимума и минимума называют **точками экстремума функции** (от лат. *extremus* — крайний).

Значения функции в данных точках обозначают $y_{\max}$, $y_{\min}$.

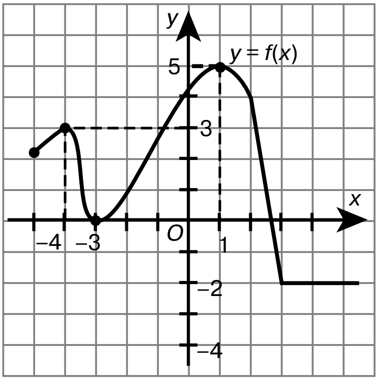


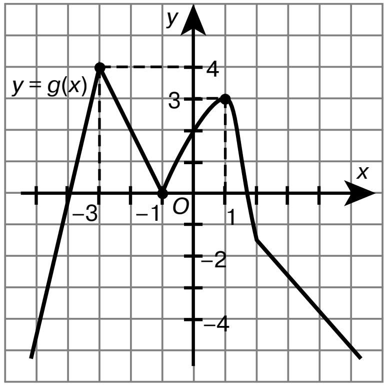
Точки экстремума являются внутренними точками области определения функции. Например, точка $x_0=-1$ не является точкой максимума функции $y=\arccos x$.



Практические задания

12 Определите по графику функции точки экстремума y_{max} и y_{min}.

а) 

б) 

1. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. *а*):

а) точки максимума: –4 и 1; б) точка минимума: –3;

в) $f_{max} = 3$; $f_{min} = 0$; $f_{max} = 5$.

2. Рассмотрим график функции $y = g(x)$ (рис. *б*):

а) точки максимума: –3 и 1; б) точка минимума: –1;

в) $g_{max} = 4$; $g_{min} = 0$; $g_{max} = 3$.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

Число $f(x_0)$ называют **наибольшим (наименьшим) значением функции** $y = f(x)$ на множестве X, если существует $x_0 \in X$, такое, что для любого x из множества X выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$ $[f(x_0) \leq f(x)]$.

Наибольшее (наименьшее) значение функции на множестве X — это самое большое (маленькое) значение зависимой переменной y при $x_0 \in X$.

! Если у функции существует $y_{наим}$, то она ограничена снизу.

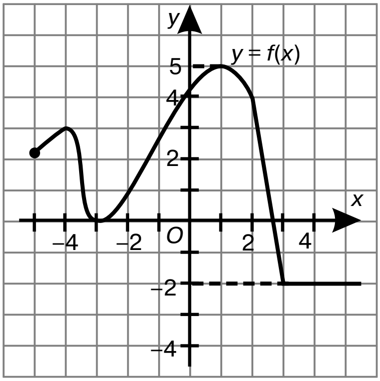
Если у функции существует $y_{наиб}$, то она ограничена сверху.

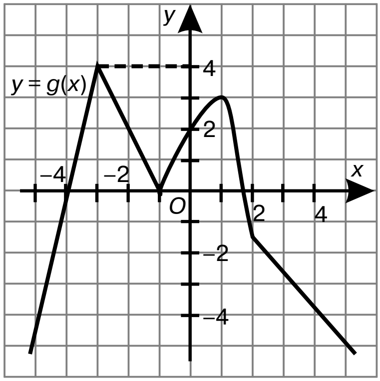
Если функция не ограничена снизу, то у неё не существует $y_{наим}$.

Если функция не ограничена сверху, то у неё не существует $y_{наиб}$.

Практические задания

13 Определите по графику наибольшее и наименьшее значение функции.

а) 

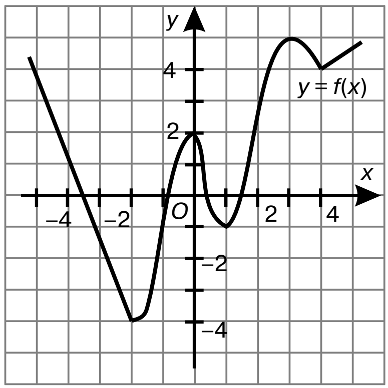
б) 

1. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. *а*): $f_{\text{наиб}} = 5$; $f_{\text{наим}} = -2$.

2. Рассмотрим график функции $y = g(x)$ (рис. *б*):
$g_{\text{наиб}} = 4$; $g_{\text{наим}}$ не существует, т. к. график уходит в минус бесконечность.

---

14 Исследуйте функцию, график которой изображён на рисунке.



1) $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$. 2) $E(f) = [-4;\ +\infty)$.

3) Функция возрастает на $(-2;\ 0]$, $[1;\ 3]$ и $[4;\ +\infty)$; функция убывает на $(-\infty;\ -2]$, $[0;\ 1]$ и $[3;\ 4]$.

4) Функция ни чётная, ни нечётная.

5) Функция не является периодической.

6) Функция ограничена снизу.

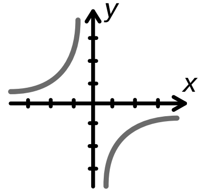
7) $y_{\text{наим}} = -4$; наибольшего значения функция не имеет.

8) Точки максимума: 0 и 3; точки минимума: –2; 1 и 4.

9) Минимумы функции: –4; –1; 4; максимумы функции: 2; 5.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

В разделе рассмотрены основные элементарные функции: прямая и обратная пропорциональные зависимости, степенная функция с натуральным показателем, тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции. Приведены их свойства и графики.

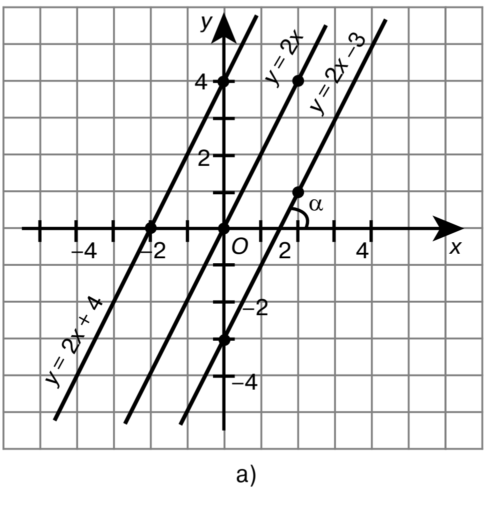


ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

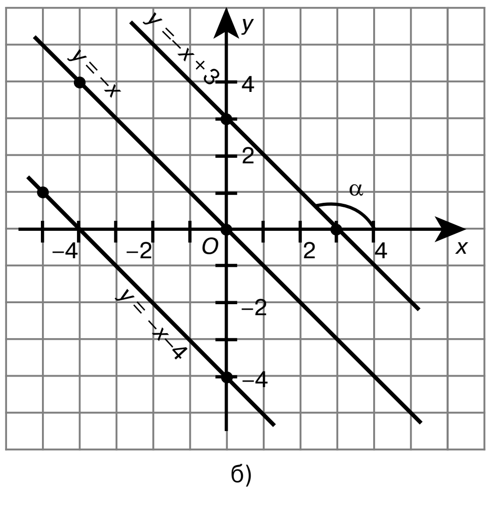
Линейной называется функция, которую можно записать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа. Число k называют **угловым коэффициентом**.

Если угловые коэффициенты прямых (k) различны, то прямые пересекаются, а если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны.

> **!** Графиком линейной функции является **прямая**, для её построения достаточно найти координаты двух точек.



а)

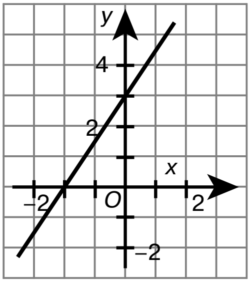


б)

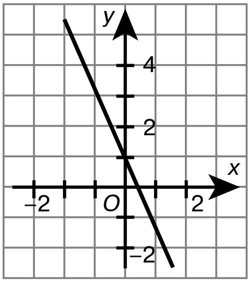
Если $k > 0$, то линейная функция является возрастающей и угол наклона прямой к оси Ox (α) острый (рис. *а*, с. 133).

Если $k < 0$, то линейная функция является убывающей и угол наклона прямой к оси Ox (α) тупой (рис. *б*, с. 133).

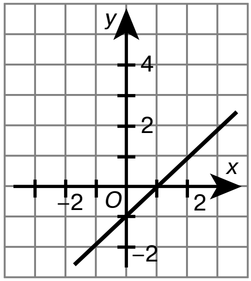
График функции $y = kx + b$ пересекает ось Oy в точке $(0;\ b)$.



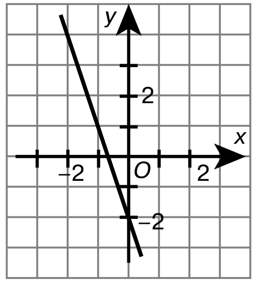
$k > 0,\ \ b = 3$



$k < 0,\ \ b = 1$



$k > 0,\ \ b = -1$



$k < 0,\ \ b = -2$

ФУНКЦИЯ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ОБРАТНУЮ ПРОПОРЦИОНАЛЬНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ, ЕЁ ГРАФИК

Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой $y = \dfrac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — число, $k \neq 0$.

!

Кривую, являющуюся графиком обратной пропорциональности, называют **гиперболой**.

Оси Ox и Oy для обратной пропорциональности являются **асимптотами** — прямыми, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются, но никогда их не пересекают.

Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$

1. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. Функция нечётная, т. к. $f(-x) = \dfrac{k}{-x} = -f(x)$.

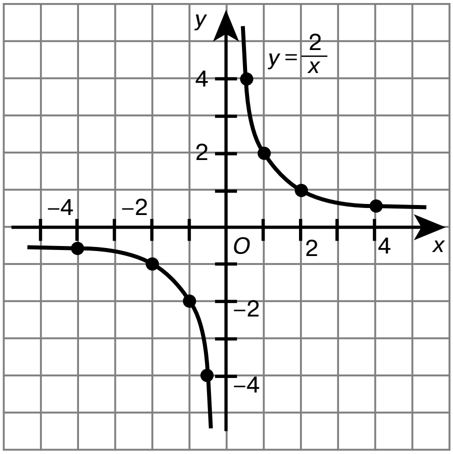
3. а) Если $k > 0$, то функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и на промежутке $(0;\ +\infty)$.

б) Если k < 0, то функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и на промежутке $(0;\ +\infty)$.

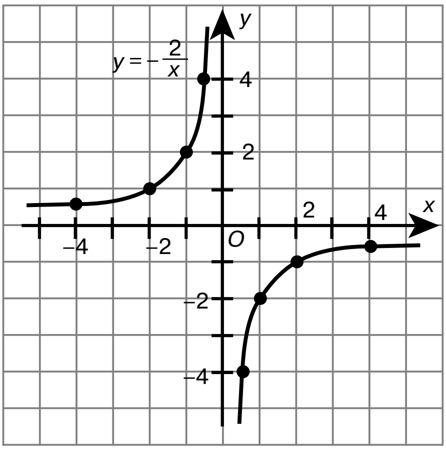
Практические задания

15 Постройте графики функций.

а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$.



а)



б)

x	$y = \frac{2}{x}$	$y = -\frac{2}{x}$
-4	$\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$
-2	$\frac{2}{-2} = -1$	$-\frac{2}{-2} = 1$
-1	$\frac{2}{-1} = -2$	$-\frac{2}{-1} = 2$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$	$-\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$	$-\frac{2}{\frac{1}{2}} = -4$
1	$\frac{2}{1} = 2$	$-\frac{2}{1} = -2$
2	$\frac{2}{2} = 1$	$-\frac{2}{2} = -1$
4	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Если $k > 0$, то график расположен в I и III четверти; если $k < 0$, то график расположен в II и IV четверти.

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЁ ГРАФИК

Квадратичной называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — числа, $a \neq 0$.

! Кривую, являющуюся графиком квадратичной функции, называют **параболой**.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось Oy в точке $(0; c)$.

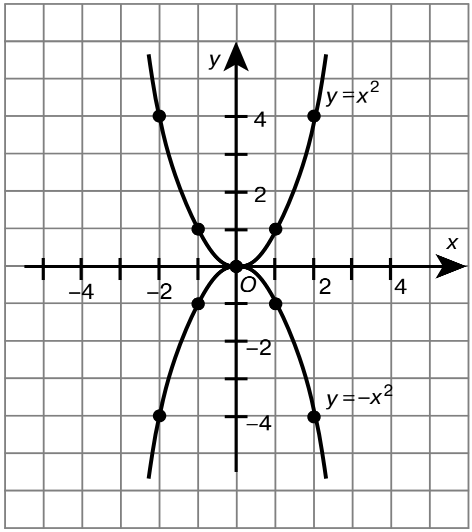
При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

Свойства функции $y = ax^2$

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Функция чётная, т. к. $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$.

3. а) Если $a > 0$, то функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.



б) Если $a < 0$, то функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

4. а) Если $a > 0$, то функция ограничена снизу; $y_{\text{наим}} = 0$.
б) Если $a < 0$, то функция ограничена сверху; $y_{\text{наиб}} = 0$.

5. Точки экстремума:
а) Если $a > 0$, то точка минимума равна 0; точек максимума нет.
б) Если $a < 0$, то точка максимума равна 0; точек минимума нет.

Практические задания

16 Постройте графики функций.

а) $y = x^2 - 6x + 5$.

1) Найдём вершину параболы:

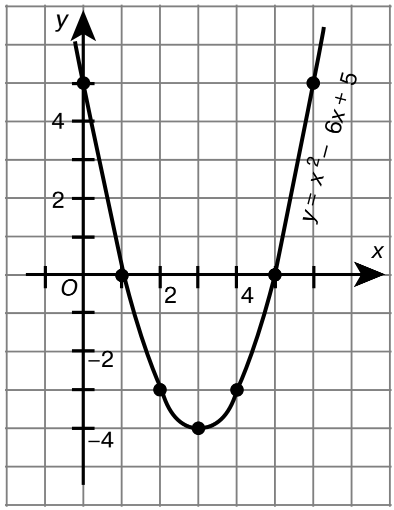
$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3;$$

$$f(x_в) = 3^2 - 6\cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4.$$

2) Составим таблицу значений:

x	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5

3) Построим по точкам график функции.



б) $y = -2x^2 - 8x + 1.$

1) Найдём вершину параболы:

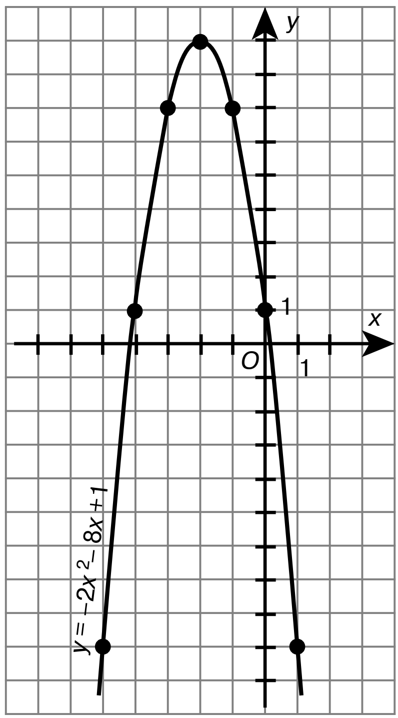
$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\cdot(-2)} = \frac{8}{-4} = -2;$$

$$f(x_в) = (-2)\cdot(-2)^2 - 8\cdot(-2) + 1 = -8 +$$
$$+16 + 1 = 9.$$

2) Составим таблицу значений:

x	–5	–4	–3	$\boxed{-2}$	–1	0	1
y	–9	1	7	9	7	1	–9

3) Построим по точкам график функции.



СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ, ЕЁ ГРАФИК

Кубическая функция и её график

Кубической называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^3$, где x — переменная, $a \neq 0$.

> **!** Кривую, являющуюся графиком кубической функции, называют **кубической параболой**.

Свойства кубической функции

1. $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. Функция нечётная, т. к. $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$.

График функции симметричен относительно начала координат.

3. а) Если $a > 0$, то функция возрастает на всей числовой прямой.

б) Если $a < 0$, то функция убывает на всей числовой прямой.

4. Нули функции: $x = 0$.

5. Промежутки знакопостоянства:

а) если $a > 0$, то функция принимает положительные значения при $x \in (0; +\infty)$ и отрицательные значения при $x \in (-\infty; 0)$;

б) если $a < 0$, то функция принимает положительные значения при $x \in (-\infty; 0)$ и отрицательные значения при $x \in (0; +\infty)$.

Степенной функцией с натуральным показателем называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^n$, где x — переменная, n — натуральное число, $a \neq 0$.

1) При $n = 1$ получаем линейную функцию $y = ax$, графиком которой является прямая.

2) При $n = 2$ получаем квадратичную функцию $y = ax^2$, графиком которой является парабола.

3) Если n — чётное число, $n > 2$ ($n = 4;\ 6;\ 8\ldots$), то график функции похож на параболу. Функция обладает теми же свойствами, что и функция $y = ax^2$.

4) При $n = 3$ получаем функцию $y = ax^3$, графиком которой является кубическая парабола.

5) Если n — нечётное число, $n > 3$ ($n = 5;\ 7;\ 9\ldots$), то график функции похож на кубическую параболу. Функция обладает теми же свойствами, что и кубическая функция $y = ax^3$.

6) Если n — нечётное число, $n > 3$ ($n = 5;\ 7;\ 9\ldots$), то функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной.

7) Если n — чётное число, $n > 2$ ($n = 4;\ 6;\ 8\ldots$) и $x \geq 0$, то функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной.

8) Если n — чётное число, $n > 2$ ($n = 4;\ 6;\ 8\ldots$) и $x \leq 0$, то функция $y = -\sqrt[n]{x}$ при $x \in [0; +\infty)$ является обратной.

Практические задания

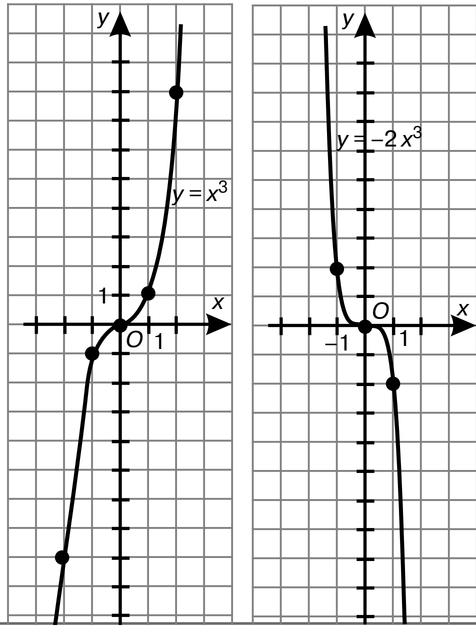
17 Постройте графики функций.

а) $y = x^3$;

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–1	0	1	8

б) $y = -2x^3$.

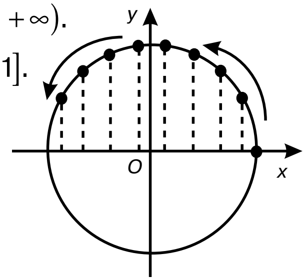
x	–2	–1	0	1	2
y	16	2	0	–2	–16



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Свойства и график функции $y = \sin x$

1. $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.
2. $E(f) = [-1;\ 1]$.



3. Функция периодическая с основным периодом 2π, $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, где $k \in Z$.

4. Функция нечётная; $\sin(-x) = -\sin x$.

5. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где $k \in Z$.

6. Функция ограничена и сверху, и снизу.

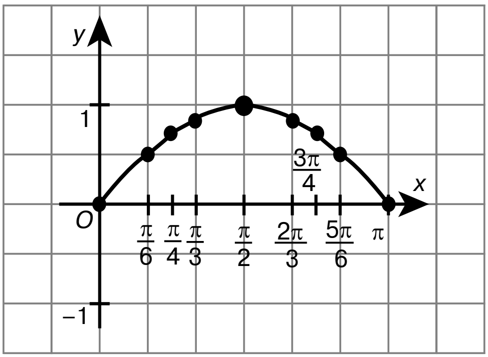
! Кривую, являющуюся графиком функции $y = \sin x$, называют **синусоидой**.

Построение графика функции $y = \sin x$

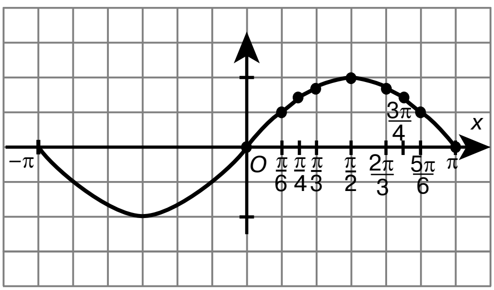
1) Составим таблицу значений:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

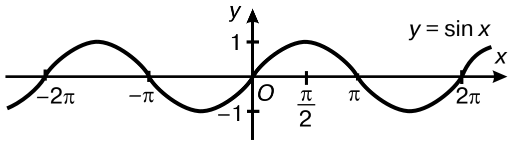
2) Построим график на отрезке $[0;\ \pi]$:



3) Функция $y = \sin x$ является нечётной, поэтому выполним симметрию построенного графика относительно начала координат и получим график функции на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:



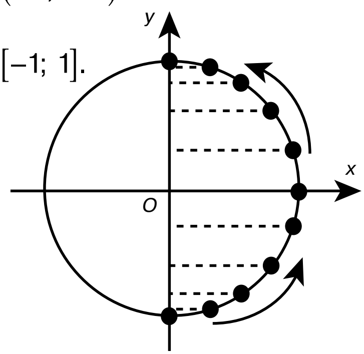
4) Используя периодичность функции $y = \sin x$, построим график функции на всей области определения:



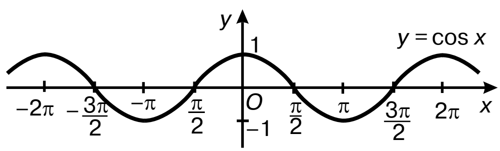
Свойства и график функции $y = \cos x$

1. $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. $E(f) = [-1;\ 1]$.



3. Функция периодическая с основным периодом 2π; $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, где $k \in Z$.



4. Функция чётная; $\cos(-x) = \cos x$.

5. Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$ и убывает на промежутках $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, где $k \in Z$.

6. Функция ограничена и сверху, и снизу.

> **!** Кривую, являющуюся графиком функции $y = \cos x$, называют **синусоидой**.

■ Свойства и график функции y = tgx

1. $D(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k \in Z$.

2. $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

3. Функция периодическая с основным периодом π; $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$, где $k \in Z$.

4. Функция нечётная; $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

5. Функция возрастает на промежутках $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k \in Z$.

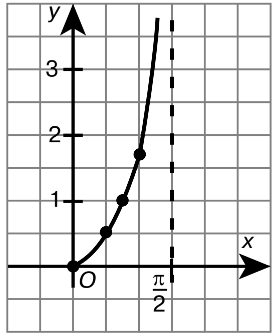
■ Построение графика функции y = tgx

1) Составим таблицу значений:

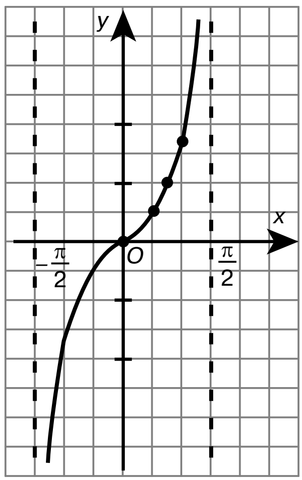
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

> **!** Кривую, являющуюся графиком функции $y = \operatorname{tg} x$, называют **тангенсоидой**.

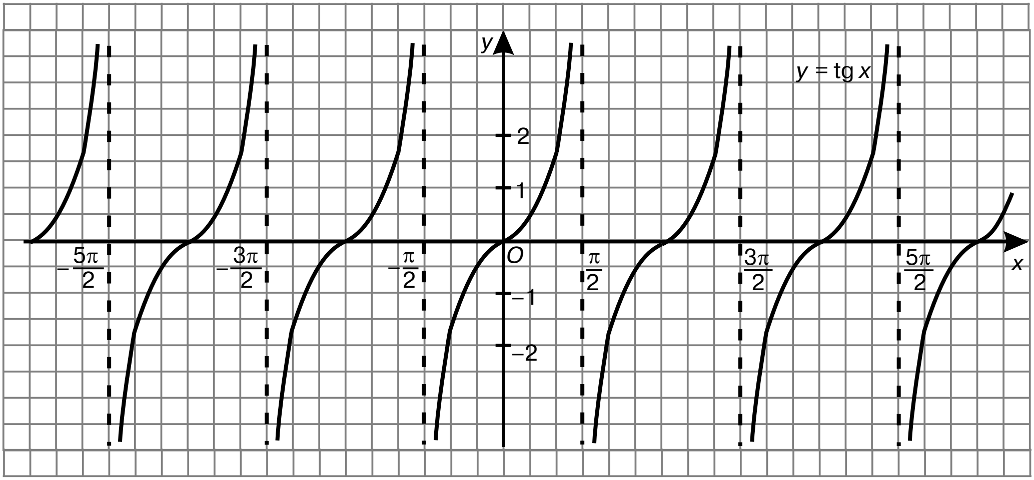
2) Построим график на промежутке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$:



3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ является нечётной, поэтому выполним симметрию построенного графика относительно начала координат и получим график функции на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$:



4) Используя периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, построим график функции на всей области определения:



Свойства и график функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. $D(f) = (\pi k;\ \pi + \pi k)$, где $k \in Z$.

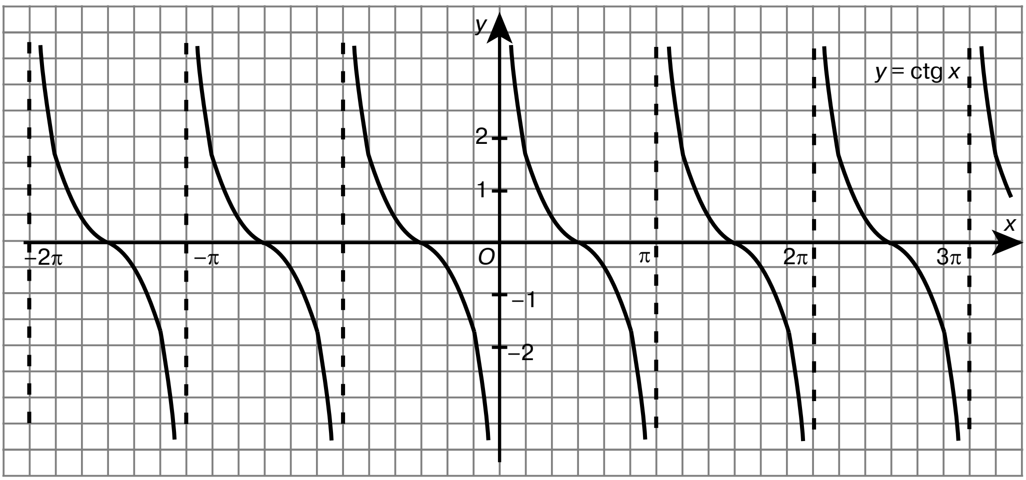
2. $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

3. Функция периодическая с основным периодом π; $\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$, где $k \in Z$.

4. Функция нечётная; $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

5. Функция убывает на промежутках $(\pi k;\ \pi + \pi k)$, где $k \in Z$.

> **!** Кривую, являющуюся графиком функции $y = \operatorname{ctg} x$, называют **тангенсоидой**.



Свойства и график функции $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$ монотонна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, значит, на данном отрезке она имеет обратную функцию. Её обозначают $y = \arcsin x$.

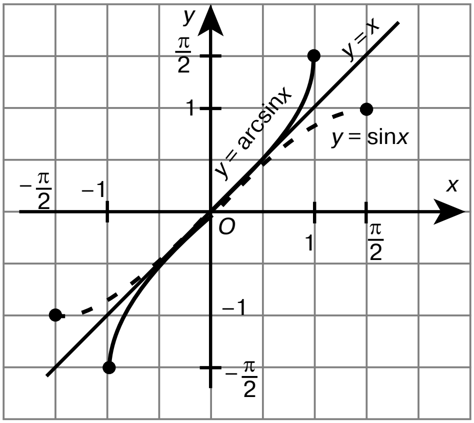


График функции $y = \arcsin x$ может быть получен из графика функции $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

1. $D(f) = [-1; 1]$.
2. $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция нечётная; $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4. Функция возрастает на всей области определения.

$$\boldsymbol{\sin(\arcsin a) = a}$$

Свойства и график функции $y = \arccos x$

Функция $y = \cos x$ монотонна на отрезке $[0; \pi]$, значит, на данном отрезке она имеет обратную функцию. Её обозначают $y = \arccos x$.

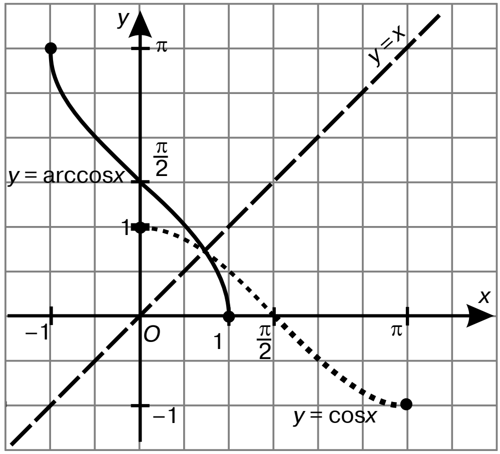


График функции $y = \arccos x$ может быть получен из графика функции $y = \cos x,\ x \in [0; \pi]$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

1. $D(f) = [-1; 1]$.
2. $E(f) = [0; \pi]$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
4. Функция убывает на всей области определения.

$$\boldsymbol{\cos(\arccos a) = a}$$

■ Свойства и график функции $y = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонна на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, значит, на данном промежутке она имеет обратную функцию. Её обозначают $y = \operatorname{arctg} x$.

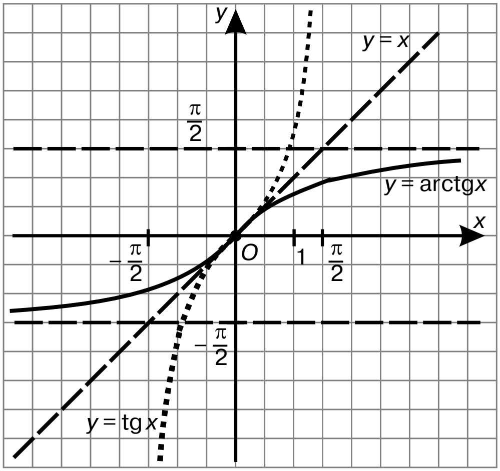


График функции $y = \operatorname{arctg} x$ может быть получен из графика функции $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция нечётная; $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. Функция возрастает на всей области определения.

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a}$$

■ Свойства и график функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонна на промежутке $(0; \pi)$, значит, на данном промежутке она имеет обратную функцию. Её обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$.

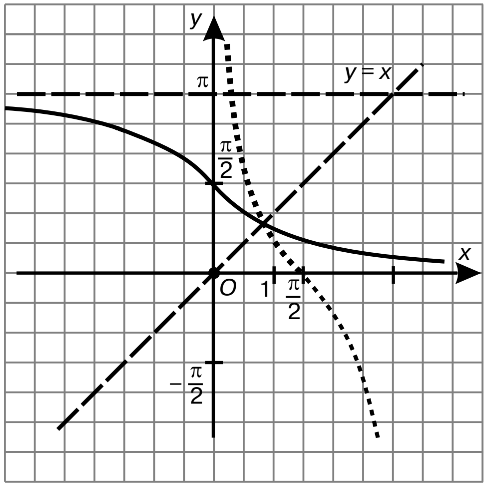


График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ может быть получен из графика функции $y = ctgx,\ x \in (0; \pi)$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = (0; \pi)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
4. Функция убывает на всей области определения.

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a}$$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЁ ГРАФИК

Показательной называется функция, которую можно задать формулой вида $y = a^x$, где x — переменная, $a > 0$, $a \neq 1$.

1. $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

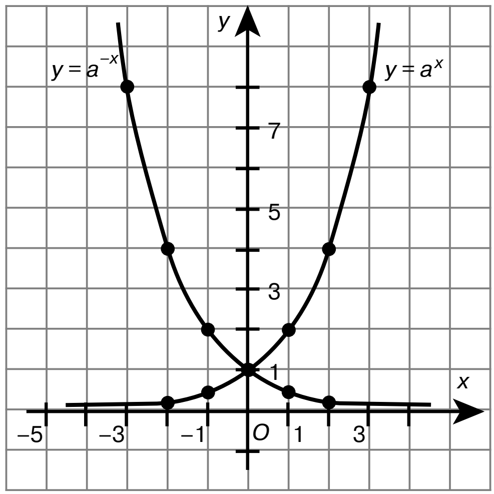
2. $E(f) = (0;\ +\infty)$.

3. Функция ограничена снизу.

а) Если $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения;
б) если $0 < a < 1$, то функция убывает на всей области определения.

4. Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Графики функций $y = a^x$ и $y = a^{-x}$ симметричны относительно оси Oy.



! Кривую, являющуюся графиком функции $y = a^x$, называют **экспонентой**.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЁ ГРАФИК

Показательная функция монотонна на всей области определения, следовательно, показательная функция имеет обратную. Её обозначают $y = \log_a x$.

График логарифмической функции $y = \log_a x$ получается из графика показательной функции $y = a^x$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$.

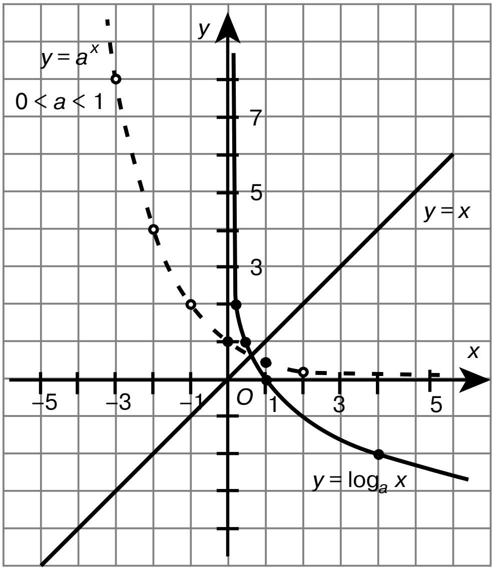
! Кривую, являющуюся графиком функции $y = \log_a x$, называют **логарифмической кривой**.

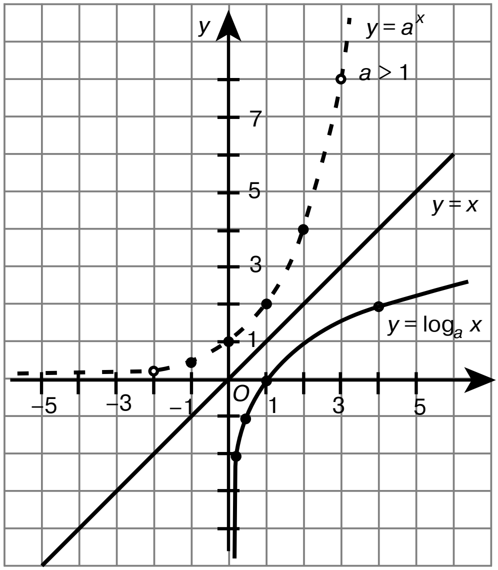
1. $D(f) = (0;\ +\infty)$.

2. $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

3. а) Если $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения;
б) если $0 < a < 1$, то функция убывает на всей области определения.

4. Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.





Практические задания

18 Постройте график функции $y = \log_2(2x+4)+3$.

Схема построения:

1) $y = \log_2 x$;
2) $y = \log_2(x+4)$, сдвиг графика влево вдоль оси Ox на 4 единицы;
3) $y = \log_2(2x+4)$, сжатие графика в 2 раза вдоль оси Ox;
4) $y = \log_2(2x+4)+3$, сдвиг графика функции вверх вдоль оси Oy на 3 единицы.