Методы решения рациональных уравнений.

Теоретические сведения.

Определение 1. Рациональными уравнениями называются уравнения вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0, \qquad (1)$$

где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$ – многочлены степеней n и m соответственно с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$; $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m$, причем $a_0b_0 \neq 0$. В простейшем случае $Q_m(x) \equiv 1$ рациональное уравнений $P_n(x) = 0$ называется также алгебраическим уравнением.

Определение 2. Любое число $x = a$ обращающее уравнение (1) в верное равенство будем называть решением или корнем уравнения (1). Далее будем рассматривать только действительные (вещественные) решения уравнения (1).

Рассмотрим более подробно некоторые способы решения алгебраического уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (2)$$

где $a_0 \neq 0$.

При $n = 1$ получим линейное уравнение $a_0x + a_1 = 0$ или $ax = b$ $(a = a_0, b = -a_1)$. В зависимости от значений коэффициентов данного уравнения возможны решения:

$$\left[\begin{array}{c} x = \dfrac{b}{a}, \text{ при } a \neq 0 \text{ (единственное решение);} \\ x \in \mathbf{R},\ a = 0 \text{ и } b = 0 \text{ (бесконечное множество решений);} \\ x \in \varnothing,\ a = 0 \text{ и } b \neq 0 \text{ (решений нет).} \end{array}\right.$$

При $n=2$ имеем квадратное уравнение $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ или $ax^2+bx+c=0$ ($a=a_0, b=a_1, c=a_2$). Для этого уравнения также возможно существование различного количества решений (корней):

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{при } D=b^2-4ac>0 \,(\text{два различных действительных корня}); \\ x_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}, \text{при } D=0 \,(\text{один корень кратности 2 или два равных корня}); \\ x\in\varnothing, \text{при } D<0 \,(\text{действительных корней нет}). \end{array}\right.$$

Напомним, что для квадратного уравнения справедлива теорема Виета.

Теорема 1. Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{c}{a}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Напомним некоторые теоретические сведения, которые помогут решить уравнение высшей степени ($n\geq 3$):

- Уравнение степени n может иметь не более n действительных корней. При этом уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

- Если $x=\alpha$ является корнем уравнения (2), то многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ делится на двучлен $(x-\alpha)$, то есть существует многочлен $\tilde{P}_{n-1}(x)$ такой, что $P_n(x)=(x-\alpha)\tilde{P}_{n-1}(x)$. Уравнение в этом случае равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} x=\alpha, \\ \tilde{P}_{n-1}(x)=0. \end{array}\right.$

Деление многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$ можно производить «уголком» или по схеме Горнера.

Покажем, как использовать схему Горнера. Пусть требуется разделить $P_n\left(x\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ на $(x-\alpha)$. В результате получим многочлен $\widetilde{P}_{n-1}(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$, причем $P_n\left(x\right)=\left(x-\alpha\right)\tilde{P}_{n-1}\left(x\right)$, то есть

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-\alpha)\left(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}\right)=$$
$$=b_0x^n+(b_1-\alpha b_0)x^{n-1}+(b_2-\alpha b_1)x^{n-1}+\ldots+(b_{n-2}-\alpha b_{n-1})x-\alpha b_{n-1}.$$

Многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях, то есть $b_0=a_0$, $b_1-\alpha b_0=a_1$, $b_2-\alpha b_1=a_2,\ldots-\alpha b_{n-1}=a_n$. Отсюда $b_0=a_0$, $b_1=\alpha b_0+a_1$, $b_2-\alpha b_1+a_2,\ldots b_{n-1}=\alpha b_{n-2}+a_{n-1}$. Нахождение коэффициентов многочлена $\widetilde{P}_{n-1}(x)$ удобно производить с помощью таблицы:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
α	$b_0=a_0$	$b_1=a_1+\alpha b_1$	$b_2=a_2+\alpha b_1$	$\ldots$	$b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$	остаток от деления

Если рациональное число $x_0=\dfrac{p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, является корнем уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ с целыми коэффициентами, то p должно быть делителем свободного члена a_n, а q – делителем коэффициента a_0 при старшей степени x^n. В частности, целые корни $x_0=p$ приведенного уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ необходимо искать среди делителей свободного члена a_n.

Если сумма всех коэффициентов уравнения равна нулю, то уравнение имеет корень $x=1$.

Например, сумма коэффициентов уравнения $3x^5+7x^4-x^3+2x^2-4x-7=0$ равна нулю, поэтому оно имеет корень $x=1$.

- Если в уравнении сумма коэффициентов при нечетных степенях равна сумме свободного члена и коэффициентов при четных степенях, то уравнение имеет корень $x=-1$.

Например, в уравнении $5x^4+3x^3-x^2+7x+6=0$ имеем $5-1+6=3+7$, поэтому $x=-1$ – корень данного уравнения.

- Для уравнений высших степеней $(n\geq 3)$ справедлива теорема Виета, которую сформулируем в случае $n=3$ и $n=4$.

  - Если действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a\neq 0$, то они удовлетворяют условиям: $\begin{cases} x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}, \\ x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$

  - Если действительные числа x_1, x_2, x_3 и x_4 являются корнями уравнения четвертой степени $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a\neq 0$, то они удовлетворяют условиям: $\begin{cases} x_1x_2x_3x_4=\dfrac{e}{a}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4=-\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3++x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\dfrac{c}{a}, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$

- Если уравнение не имеет рациональных корней, то некоторые уравнения можно решать вспомогательными методами.

Рассмотрим некоторые способы решения уравнений высших степеней на примерах.

Метод подбора корня (корней).

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - x^3 - 13x - 15 = 0$.

Решение: Так как данное уравнение является приведенным и имеет целые коэффициенты, то найдем один его корень подбором среди делителей свободного члена -15: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Легко убедиться, что $x = -1$ является корнем уравнения. Чтобы найти остальные корни разделим многочлен $x^4 - x^3 - 13x - 15$ на двучлен $x + 1$ «уголком»:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 - 13x - 15 & x + 1 \\ \hline
-\underline{x^4 + x^3} & x^3 - 2x^2 + 2x - 15 \\
\quad -2x^3 - 13x - 15 & \\
\quad -\underline{-2x^3 - 2x^2} & \\
\qquad\quad 2x^2 - 13x - 15 & \\
\qquad\quad -\underline{2x^2 + 2x} & \\
\qquad\qquad -15x - 15 & \\
\qquad\qquad -\underline{-15x - 15} & \\
\qquad\qquad\qquad 0. &
\end{array},
$$

или по схеме Горнера:

	1	-1	0	-13	-15
-1	1	-2	2	-15	0

Для уравнения $x^3 - 2x^2 + 2x - 15 = 0$ вновь подбором найдем корень $x = 3$, а затем разделим многочлен $x^3 - 2x^2 + 2x - 15$ на двучлен $x - 3$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2+2x-15 & x-3 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3-3x^2} & x^2+x+5 \\
x^2+2x-15 & \\
-\underline{-x^2-3x} & \\
5x-15 & \\
-\underline{5x-15} & \\
0 &
\end{array}
$$

Уравнение $x^2+x+5=0$ действительных корней не имеет. Таким образом исходное уравнение 4-й степени имеет два действительных корня.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=3$.

Пример 2. Решить уравнение $30x^3+x^2-6x-1=0$.

Решение. При решении данного уравнения можно искать его корни в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Однако, если свободный член уравнения равен ± 1, то предпочтительнее ввести новую переменную $y=\frac{1}{x}$. (Проверьте, что $x=0$ не является корнем исходного уравнения).

После замены переменных новое уравнение $y^3+6y^2-y-30=0$ является приведенным (коэффициент при старшей степени равен 1). Поэтому целые корни данного уравнения находятся среди делителей свободного члена $-30:\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$. Подстановкой убедитесь, что $y_1=2$, $y_2=-3$ и $y_3=-5$ – искомые решения. Им будут соответствовать корни исходного уравнения $x_1=\frac{1}{y_1}=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{y_2}=-\frac{1}{3}$ и $x_3=\frac{1}{y_3}=-\frac{1}{5}$.

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$ и $x_3=-\frac{1}{5}$.

Пример 3. Решить уравнение $(x^2+x+1)(x^2+x-2)=4$.

Решение. Если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получится уравнение $x^4+2x^3-x-6=0$, которое решать весьма сложно.

Поэтому воспользуемся другим способом: введем новую переменную $y = x^2 + x$ и решим квадратное уравнение $(y+1)(y-2)=4$. Его корни: $y_1 = 3$ и $y_2 = -2$. Соответственно исходное уравнение будет равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2 + x = 3, \\ x^2 + x = -2. \end{array}\right.$

$x^2 + x - 3 = 0,$ $D = 1 + 12 = 13 > 0,$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$	или	$x^2 + x + 2 = 0,$ $D = 1 - 8 = -7 < 0,$ *решений нет.*

Таким образом, исходное уравнение 4-й степени имеет два корня $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

<u>Ответ:</u> $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

✔ Если при замене переменных исходное уравнение упрощается (например, понижается его степень), то смело вводим новую переменную.

<u>Пример 4.</u> Решить уравнение $x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0$.

<u>Решение.</u> Данное уравнение можно решать двумя способами.

Способ 1. Сгруппируем слагаемые следующим образом: $(x^3 - 8) + (x^2 - 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x^2 + 2x + 4) + x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$(x-2)(x^2 + 3x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} x = 2 \\ x^2 + 3x + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Уравнение $x^2 + 3x + 4 = 0$ не имеет решений, поскольку $D = 9 - 16 = -7 < 0$. Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 2$.

Способ 2. Так как данное уравнение является приведенным и имеет целые коэффициенты, то найдем один его корень подбором среди делителей свободного члена -8: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Легко убедиться, что $x = 2$ является корнем уравнения. Чтобы найти остальные корни разделим многочлен x^3+x^2-2x-8 на двучлен $x-2$:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-2x-8 & \underline{\;x-2\;} \\ & x^2+3x+4 \\ -\underline{x^3-2x^2} & \\ 3x^2-2x-8 & \\ -\underline{3x^2-6x} & \\ 4x-8 & \\ -\underline{4x-8} & \\ 0. & \end{array}$$

Получим совокупность двух уравнений $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+3x+4=0 \end{array}\right.$, которая решена в способе 1.

Ответ: $x=2$.

Пример 5. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $3x^3+4\sqrt{3}x^2+x-2\sqrt{3}=0$.

Решение. Подобрать корни данного уравнения весьма сложно, поэтому воспользуемся следующим приемом: домножим (или разделим) данное уравнение на некоторое число так, чтобы старший член уравнения стал кубом некоторого выражения.

$$3x^3+4\sqrt{3}x^2+x-2\sqrt{3}=0 \quad |\times\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3}x^3+12x^2+\sqrt{3}x-6=0$$

Заметим, что $3\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{3}x\right)^3$, и введем новую переменную $y=\sqrt{3}x$. В результате получим уравнение $y^3+4y^2+y-6=0$, равносильное исходному. Подбором найдем его корни $y_1=1$, $y_2=-2$ и $y_3=-3$, которым будут соответствовать корни исходного уравнения $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=\frac{-2}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ и

$x_3 = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$. Наибольшим отрицательным корнем является $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: наибольший отрицательный корень – $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 6. Найти наименьший корень уравнения

$$\left(x^2+6x-5\right)^2+x^3-5x=0.$$

Решение. Рассмотрим еще один способ решения уравнений высших степеней. Преобразуем исходное уравнение следующим образом: $\left(x^2+6x-5\right)^2+x^3-5x=0 \iff \left(x^2+6x-5\right)^2+x\left(x^2-5\right)=0 \iff$ $\left(x^2+6x-5\right)^2+x\left(x^2+6x-5\right)-6x^2=0$

Введем новую переменную $y=x^2+6x-5$ и получим уравнение $y^2+xy-6x^2=0$. Решим полученное уравнение как квадратное относительно y.

$$y^2+xy-6x^2=0,$$

$$D=x^2+24x^2=25x^2=(5x)^2,$$

$$y=\frac{-x\pm 5x}{2},$$

$y_1=-3x$ или $y_2=2x$.

Вернемся к переменной x.

$x^2+6x-5=-3x,$ $x^2+9x-5=0,$ $D=81+20=101,$ $x=\frac{-9\pm\sqrt{101}}{2},$ $x_1=\frac{-9+\sqrt{101}}{2}, x_2=\frac{-9-\sqrt{101}}{2}$	$x^2+6x-5=2x,$ $x^2+4x-5=0,$ $\frac{D}{4}=4+5=9,$ $x=-2\pm 3,$ $x_3=-5, x_4=1.$

Получили 4 решения исходного уравнения. Выберем наименьшее из них. Так

как $\sqrt{101} > 10$, то $x_2 = \frac{-9-\sqrt{101}}{2} < \frac{-9-10}{2} = -9.5$, поэтому x_2 – наименьшее решение.

Ответ: наименьшее решение $x_2 = \frac{-9-\sqrt{101}}{2}$.

✔ Можно ввести еще одну переменную и рассмотреть квадратное уравнение относительно одной из полученных («старой» или «новой») переменных.

Возвратные уравнения и их решение.

Определение. Возвратным или симметричным называются уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, для которых равны коэффициенты, стоящие на симметричных позициях, то есть $a_k = a_{n-k}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$.

Например, $x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1$ является возвратным, так как $a_0 = 5 = a_5$, $a_1 = -9 = a_4$, $a_2 = 16 = a_3$.

Для возвратных уравнений верны следующие утверждения:

- возвратное уравнение нечетной степени всегда имеет корень $x = -1$ и после деления на двучлен $x + 1$ приводится к возвратному уравнению четной степени;
- возвратное уравнение четной степени может быть сведено к уравнению вдвое меньшей степени с помощью введения переменной $y = x + \frac{1}{x}$.

Проиллюстрируем данные утверждения на примерах.

Пример 7. Решить уравнение $x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1 = 0$.

Решение. Нетрудно заметить, что данное уравнение является возвратным нечетной степени и, следовательно, имеет корень $x = -1$. Разделим многочлен $x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1$ на двучлен $x + 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5-9x^4+16x^3+16x^2-9x+1 & x+1 \\ \hline
 & x^4-10x^3+26x^2-10x+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-\underline{x^5+x^4} \\
\quad -10x^4+16x^3+16x^2-9x+1 \\
\quad -\underline{-10x^4-10x^3} \\
\qquad 26x^3+16x^2-9x+1 \\
\qquad -\underline{26x^3+26x^2} \\
\qquad\qquad -10x^2-9x+1 \\
\qquad\qquad -\underline{-10x^2-10x} \\
\qquad\qquad\qquad x+1 \\
\qquad\qquad\qquad -\underline{x+1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Остается решить возвратное уравнение 4-й степени $x^4-10x^3 26x^2-10x+1=0$. Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, то можно разделить обе части данного уравнения на x^2. Получим $x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$. Сделаем замену переменных $y=x+\frac{1}{x}$. Тогда $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2$, то есть $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Получим уравнение $y^2-2-10y+26=0$ (степень уравнения понизилась вдвое!).

Решим полученное квадратное уравнение $y^2-2-10y+26=0 \quad \Leftrightarrow$ $y^2-10y+24=0$. По теореме Виета $y_1=4$ и $y_2=6$ – корни данного уравнения. Получим

$x+\frac{1}{x}=4 \quad \vert \times x\neq 0,$ $x^2-4x+1=0,$ $D_1=4-1=3,$ $x=2\pm\sqrt{3},$	$x+\frac{1}{x}=6 \quad \vert \times x\neq 0,$ $x^2-6x+1=0,$ $D_1=9-1=8,$ $x=3\pm 2\sqrt{2}.$

Таким образом исходное уравнение 5-й степени имеет 5 корней: $x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=3-2\sqrt{2}$ и $x_5=3+2\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=3-2\sqrt{2}$ и $x_5=3+2\sqrt{2}$.

Пример 8. Найти число различных действительных корней уравнения $x^6-3x^5-x^4+6x^3-x^2-3x+1=0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением четной степени, поэтому разделим его на $x^3\neq 0$. Получим $x^3-3x^2-x+6-\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$ или $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$. Пусть $y=x+\frac{1}{x}$. Тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Аналогично, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=y\left(y^2-2-1\right)=$ $=y^3-3y$. Таким образом исходное уравнение 6-й степени будет равносильно уравнению 3-й степени $\left(y^3-3y\right)-3\left(y^2-2\right)-y+6=0$.

$$\left(y^3-3y\right)-3\left(y^2-2\right)-y+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad y^3-3y^2-4y+12=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$y^2(y-3)-4(y-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-3)\left(y^2-4\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-3)(y-2)(y+2)=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=2, \\ y=-2. \end{array}\right.$$

Вернемся к «старой» переменной x и решим три полученных уравнения:

$x+\dfrac{1}{x}=-2 \quad \Big\vert \times x \neq 0,$ $x^2+2x+1=0,$ $(x+1)^2=0,$ $x_{1,2}=-1,$	$x+\dfrac{1}{x}=2 \quad \Big\vert \times x \neq 0,$ $x^2-2x+1=0,$ $(x-1)^2=0,$ $x_{3,4}=1,$	$x+\dfrac{1}{x}=3 \quad \Big\vert \times x \neq 0,$ $x^2-3x+1=0,$ $D=9-4=5,$ $x_{5,6}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$

Таким образом исходное уравнение имеет 6 действительных корней, из которых 4 различные.

Ответ: уравнение имеет 4 различных действительных корня.

Использование монотонности функций и других специальных приемов при решении алгебраических уравнений.

При решении алгебраических уравнений иногда бывает полезно использовать свойства степенных функций, например монотонность.

Пример 9. Решить уравнение $32(x-2)^5+(x+1)^3=96$.

Решение. Левая часть данного уравнения является строго возрастающей функцией ($y=x^n$ строго возрастает на всей числовой прямой при нечетном n, и сумма двух строго возрастающих функций есть строго возрастающая функция), а правая часть уравнения – постоянная функция. Поэтому данное уравнение 5-й степени имеет единственное действительное решение. Подбором легко находим это решение – $x=3$.

Ответ: $x=3$.

Пример 10. Решить уравнение $\left(2x^2-8x+9\right)^3+3\left(x^2-4x+5\right)^2=4$.

Решение. Данный пример можно решать двумя способами.

Способ 1. Введем новые переменные $u=2x^2-8x+9$ и $v=x^2-4x+5$. При этом исходное уравнение будет равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} u^3+3v^2=4 \\ u-2v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{u+1}{2} \\ u^3+3\dfrac{u^2+2u+1}{4}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 4u^3+3u^2+6u-13=0.$$

Полученное уравнение равносильно двум уравнениям:

$$u=1 \text{ или } 4u^2+7u+13=0.$$

Если $u=1$, то $v=1$. Если $4u^2+7u+13=0$, то решений нет.

Вернемся к переменной x и получим

$$x^2-4x+5=1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2-4x+4=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x=2.$$

Таким образом, уравнение имеет один корень $x=2$ кратности 2.

Способ 2. Введем новую переменную $y=x^2-4x+5$. Тогда

$$(2y-1)^3+3y^2=4,$$
$$8y^3-12y^2+6y-1+3y^2-4=0,$$
$$8y^3-9y^2+6y-5=0.$$

$y=1$ – корень данного уравнения (найден подбором). Разделим многочлен $8y^3-9y^2+6y-5$ на двучлен $y-1$ по схеме Горнера:

	8	-9	6	-5
1	8	-1	5	0

Уравнение $8y^2-y+5=0$ не имеет решений, так как его дискриминант $D<0$.

Если $y=1$, то $x^2-4x+5=1$ и, следовательно, $x=2$ – корень кратности 2.

<u>Ответ:</u> $x=2$.

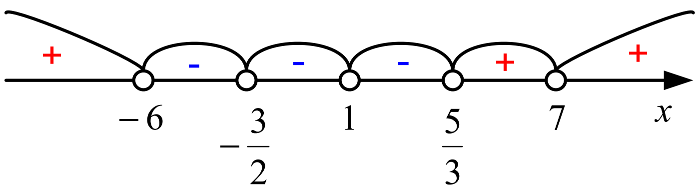
Решение рациональных неравенств.

Практически все неравенства вида $P(x)>0$, где $P(x)$ - некоторый многочлен, решаются методом интервалов. Идея метода интервалов состоит в следующем: на числовой прямой отмечаются точки, в которых многочлен $P(x)$ обращается в нуль и выделяются интервалы, на которых функция $P(x)$ сохраняет постоянный знак. На каждом из полученных интервалов определяется знак выражения $P(x)$, и записывается ответ. При этом нет необходимости определять знак функции $P(x)$ в избранной точке каждого промежутка.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x-1)^8(2x+3)^2(x-7)^4(3x-5)(x+6)^3>0.$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства $P(x)$. Отметим на числовой прямой точки, в которых многочлен $P(x)$ обращается в нуль: $+1;\ -\frac{3}{2};\ 7;\ \frac{5}{3};\ -6$. Определим знак $P(x)$ на каждом из полученных интервалов.



Для этого найдем знак $P(x)$ на крайнем правом интервале: $(7;+\infty)$. Так как $P(10)>0$, то $P(x)>0$ для любого $x\in(7;+\infty)$. Так как двучлен $(x-7)$ входит в многочлен $P(x)$ в четной степени, то при переходе через точку $x=7$ знак выражения $(x-7)^4$ не меняется, а значит и знак $P(x)$ также не меняется. В точке $x=\frac{5}{3}$ знак $P(x)$ меняем, так как $P(x)$ содержит $(3x-5)$ в нечетной степени. В точке $x=1$ знак не меняется, учитывая, что $P(x)$ содержит $(x-1)^8$. Аналогично, в точке

$x=-\frac{3}{2}$ многочлен $P(x)$ не меняет знак. А при $x=-6$ знак многочлена $P(x)$ меняем, так как двучлен $(x+6)$ входит в $P(x)$ в нечетной степени. Таким образом, $P(x)>0$ при $x\in(-\infty;-6)\cup\left(\frac{5}{3};7\right)\cup(7;+\infty)$. Отметим, что объединить интервалы $\left(\frac{5}{3};7\right)$ и $(7;+\infty)$ нельзя ввиду того, что исходное неравенство является строгим.

<u>*Ответ*</u>: $x\in(-\infty;-6)\cup\left(\frac{5}{3};7\right)\cup(7;+\infty)$.

Неравенства вида $P(x)\geq 0$ ($P(x)\leq 0$), где $P(x)$ – некоторый многочлен, решаются методом интервалов. Содержание метода интервалов и последовательность действий при его выполнении заключаются в следующем.

- Находим нули $x_1, x_2, \ldots, x_k$ многочлена $P(x)$. Пусть $x_1<x_2<\ldots<x_k$ и $P(x)=(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_k)^{m_k}$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – натуральные числа – показатели кратности корней $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
- Точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ разбивают область допустимых значений неравенства $P(x)\geq 0$ на $k+1$ интервал, на каждом из которых многочлен $P(x)$ сохраняет знак, причем $P(x)>0$ при $x>x_k$.
- Далее, двигаясь справа на лево по числовой прямой расставляем знаки на интервалах, руководствуясь правилом: *если степень m_i множителя $(x-x_i)^{m_i}$ является четным числом, то на интервале слева от точки x_i сохраняется знак предыдущего интервала (при переходе через точку x_i знак не меняется); если же m_i – нечетное число, то знак на интервале слева от точки x_i меняется на*

противоположный.

- Заметим, что при решении рациональных неравенств такое подробное решение не требуется. Необходимо изобразить числовую прямую с нанесенными на нее нулями многочлена $P(x)$ и выделенными интервалами монотонности. Этот рисунок достаточен для записи итоговых результатов.

При решении рациональных неравенств вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$$

можно использовать равносильный переход

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P_n(x) \geq 0 \\ Q_m(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P_n(x) \leq 0 \\ Q_m(x) \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

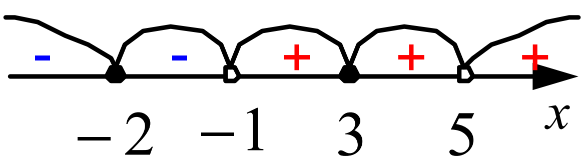
или воспользоваться методом интервалов. При использовании метода интервалов $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x) \cdot Q_m(x) \geq 0 \\ Q_m(x) \neq 0 \end{cases}$. На числовую прямую наносят точки в которых $P_n(x)$ и (или) $Q_m(x)$ обращаются в нуль: точки соответствующие $P_n(x)$ «закрашивают», так как в них левая часть неравенства обращается в нуль; а точки, соответствующие $\cdot Q_m(x)$ «выкалывают», так как в этих точках левая часть неравенства не существует. Далее, на полученных интервалах расставляются знаки «+» или «-».

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{(x-3)^6 (x+2)^2}{(x+1)^3 (x-5)^4} \geq 0$.

Решение. Найдем точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль: $3; -2; -1; 5$ и определим знаки левой части неравенства.

Получаем

$x \in \{-2\} \cup (-1; 3] \cup [3; 5) \cup (5; +\infty)$



Заметим, что

$(-1;\,3]\cup[3;\,5)=(-1;\,5)$ и окончательно получим $x\in\{-2\}\cup(-1;\,5)\cup(5;\,+\infty)$.

Ответ: $\{-2\}\cup(-1;\,5)\cup(5;\,+\infty)$.

✓ Если неравенство строгое, то «выкалываем» все нули (и числителя, и знаменателя).

Особенно внимательным нужно быть при решении неравенства вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\ge R(x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ - некоторые многочлены.

✓ Если $Q(x)$ меняет знак, то умножать обе части неравенства на $Q(x)$ нельзя!

Для решения неравенства нужно перенести $R(x)$ в левую часть неравенства и привести его к общему знаменателю:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\ge R(x)\Leftrightarrow\frac{P(x)-R(x)Q(x)}{Q((x))}>0.$$

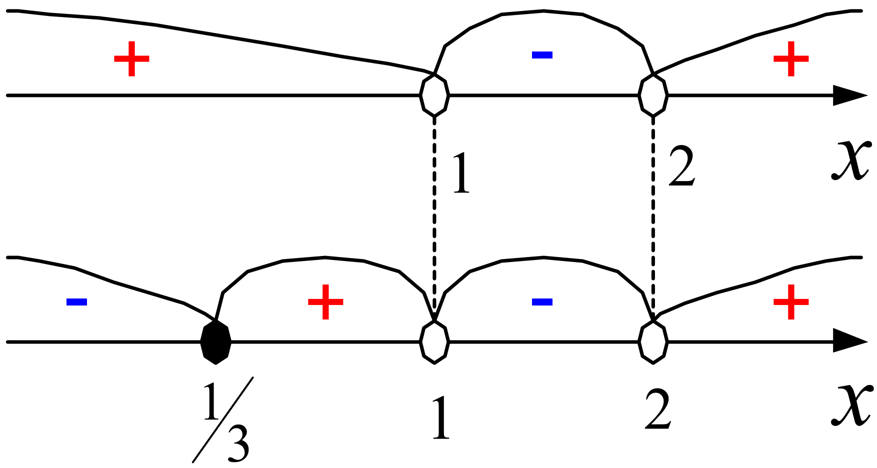
Полученное неравенство вида (1) решаем методом интервалов.

Пример 3. Решить неравенство $0<\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}\le 1$.

Решение. Данное неравенство двойное, а потому равносильно системе

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}>0\\ \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}>0\\ \dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)}\le 0\end{cases}.$$

Многочлен, стоящий в знаменателе обоих неравенств, имеет действительные корни, поэтому просто умножить обе части неравенств на знаменатель нельзя. Решив каждое неравенство методом интервалов, получим в итоге, что $x\in\left(-\infty;\,\dfrac{1}{3}\right]$.



<u>Ответ:</u> $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

Уравнения и неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля.

Напомним, сначала, определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a,\ a \ge 0 \\ -a,\ a < 0 \end{cases}.$$

Геометрический смысл модуля – расстояние от точки a на числовой прямой до начала координат. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ можно решать следующим образом:

1 способ: $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array} \right.,$

2 способ: $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ -f(x) = -g(x) \end{array} \right. \end{cases},$

3 способ: $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ (f(x))^2 = (g(x))^2. \end{cases},$

4 способ: графический.

Так как решение неравенства, как правило, сложнее решения уравнения, то первый способ удобно применять когда выражение $f(x)$ проще чем выражение $g(x)$, а второй способ – когда $g(x)$ проще, чем $f(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $|x-3| = 2x+1$.

Решение. Используем первый способ.

$$|x-3|=2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3\ge 0 \\ x-3=2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3<0 \\ 3-x=2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 3 \\ x=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Пример 2. Решить уравнение $|x^2+x-7|=x-2$.

Учитывая «плохие» корни многочлена x^2+x-7, используем второй способ.

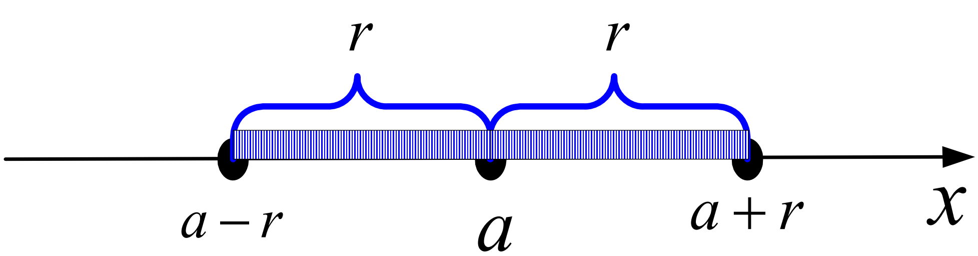
$$|x^2+x-7|=x-2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-7=x-2 \\ x^2+x-7=2-x \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2=5 \\ x^2+2x-9=0 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ x=-1\pm\sqrt{10} \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-1+\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\sqrt{5};-1+\sqrt{10}\}$.

Для решения рациональных неравенств с модулями полезно использовать геометрический смысл модуля.

Неравенство $|x-a|\le r$ означает, что расстояние от точки x на числовой оси до точки a не должно превышать числа r $(r\ge 0)$.



Таким образом, $|x-a|\le r \Leftrightarrow x\in[a-r;a+r]$.

Соответственно, $|x-a| \ge r \Leftrightarrow x \in (-\infty; a-r] \cup [a+r; +\infty)$ - расстояние больше (или равно) r.

Пример 3. Решить систему неравенств: $\begin{cases} |x-3| < 4 \\ |2x+1| \ge 3 \end{cases}$.

Решение. Будем использовать графический метод:

$$\begin{cases} |x-3| < 4 \\ |2x+1| \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| < 4 \\ \left|x+\dfrac{1}{2}\right| \ge \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 7) \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 7).$$

Ответ: $[1; 7)$.

✓ Неравенства вида $|f(x)| \ge g(x)$ равносильны совокупности неравенств:

$$\left[\begin{aligned} f(x) &\ge g(x) \\ f(x) &\le -g(x) \end{aligned}\right..$$

✓ Неравенства вида $|f(x)| \le g(x)$ равносильны системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}.$$

Пример 4. Решить неравенство $|x^2 - 3x + 1| > x + 2$.

Решение.

$$|x^2-3x+1| > x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x^2-3x+1 &> x+2 \\ x^2-3x+1 &< -x-2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x^2-4x-1 &> 0 \\ x^2-2x+3 &< 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} & x \in \left(-\infty; 2-\sqrt{5}\right) \cup \left(2+\sqrt{5}; +\infty\right) \\ & x \notin \varnothing \end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left(-\infty; 2-\sqrt{5}\right) \cup \left(2+\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Пример 5. Решить неравенство $|(x+3)(x^2+3x+3)| < x+3$.

Решение. Возникает желание сократить неравенство на $x+3$. Однако, это приведет к ошибке, так как нам не известен знак выражения $x+3$ (он может меняться). Поэтому воспользуемся общим методом решения неравенств с модулем.

$$\left|(x+3)\left(x^2+3x+3\right)\right|<x+3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+3)\left(x^2+3x+3\right)<(x+3)\\ (x+3)\left(x^2+3x+3\right)>-(x+3)\end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x+3)\left(x^2+3x+2\right)<0\\ (x+3)\left(x^2+3x+4\right)>0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+3)(x+2)(x+1)<0\\ x+3\geq 0\end{cases},$$ так как $x^2+3x+4>0$

для любого $x\in R$. Далее получим $\begin{cases}(x+2)(x+1)<0\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-2;-1)\\ x\in(-3;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow$

$x\in(-2;-1)$.

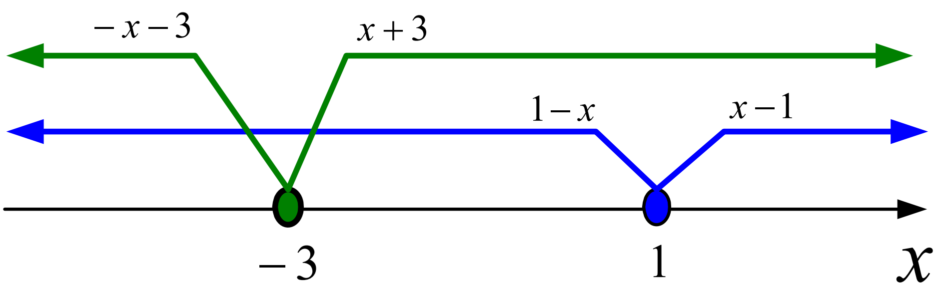
Ответ: $(-2;-1)$.

✓ При решении уравнений или неравенств с модулями задание может содержать несколько выражений под знаком модуля. В этом случае наиболее рациональным является использование метода интервалов.

Для этого находим точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль (нули модуля). Эти точки разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых каждое подмодульное выражение сохраняет определенный знак.

Пример 6. Решить уравнение $|x+3|-|x-1|=2x+5$.

Решение. Первый модуль равен нулю при $x=-3$, а второй при $x=1$. Таким образом, числовая прямая разбивается на три промежутка, на которых модули раскрываются определенным образом. Например, при $x\in(-\infty;-3)$: $x+3<0$ и, потому, $|x+3|=x-3$, $x-1<0$ и, потому, $|x-1|=1-x$.



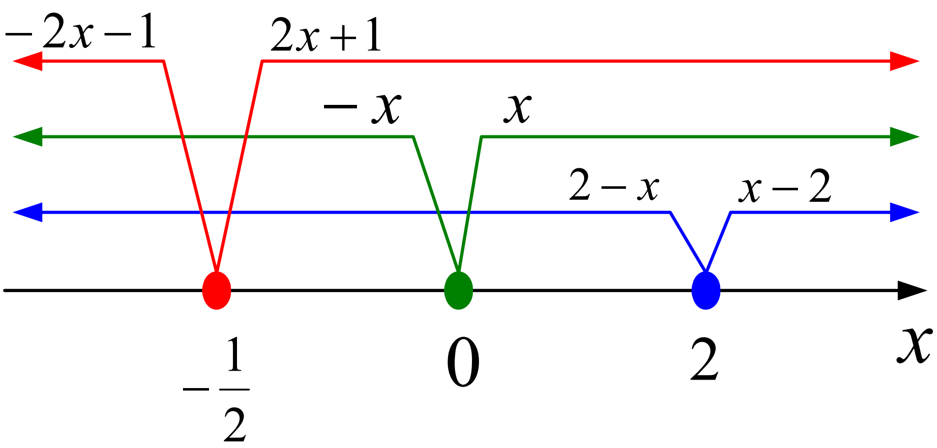
Исходное уравнение будет равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-3)\\ -x-3-1+x=2x+5\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[-3;1)\\ x+3-1+x=2x+5\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[1;+\infty)\\ x+3-x+1=2x+5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-3)\\ 2x=-9\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[-3;1)\\ 2x=5\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[1;+\infty)\\ 2x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x=-4.5\,.$$

Ответ: $\{-4.5\}$.

Пример 7. Решить уравнение $|x-2|+|2x+1|-|x|=2x+3$.

Решение. Отметим на числовой прямой нули модулей и получим совокупность, равносильную исходному уравнению:



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\ 2-x-2x-1+x=2x+3\end{cases}\\ \begin{cases}-\frac{1}{2}\le x<0\\ 2-x+2x+1+x=2x+3\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2\\ 2-x+2x+1-x=2x+3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ 2-x+2x+1-x=2x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\ 4x=-2\end{cases} & -\quad \textit{решений нет}\\ \begin{cases}-\frac{1}{2}\le x<0\\ 0=0\end{cases} & -\quad \textit{все } x\\ \begin{cases}0\le x<2\\ 2x=0\end{cases} & -\quad x=0\\ \begin{cases}x\ge 2\\ -1=3\end{cases} & -\quad \textit{решений нет}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

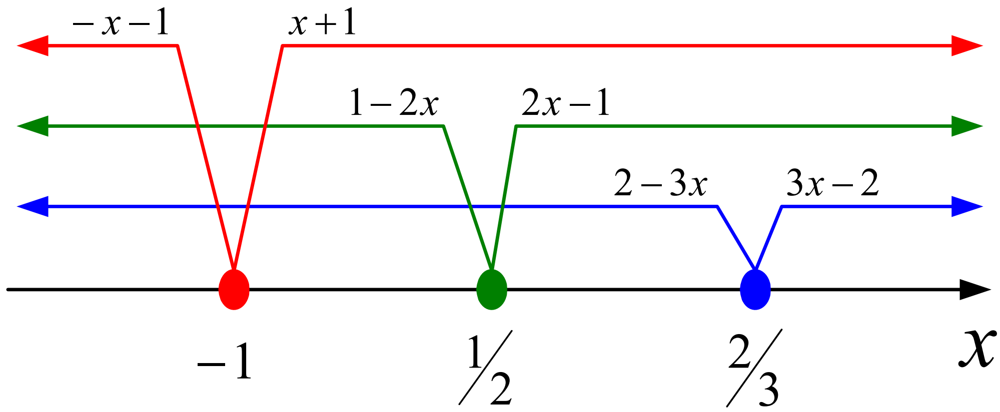
$$\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\le x<0\\ x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\le x\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left[-\frac{1}{2};0\right].$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\,0\right]$.

✓ Заметим, что в отличие от рациональных (алгебраических) уравнений без модуля решением уравнения с модулем может быть не только отдельное число и вся числовая прямая, но и конечный промежуток или совокупность промежутков.

Пример 8. Решить неравенство $|3x-2|-|x+1|+|2x-1|>x$.

Решение. Находим нули модулей и рассматриваем совокупность неравенств, равносильную исходному неравенству.



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\2-3x+x+1-2x+1>x\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<\frac{1}{2}\\2-3x-x-1-2x+1>x\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{2}\le x<\frac{2}{3}\\2-3x-x-1+2x-1>x\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\frac{2}{3}\\3x-2-x-1+2x-1>x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\5x<4\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<\frac{1}{2}\\7x<2\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{2}\le x<\frac{2}{3}\\3x<0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\frac{2}{3}\\3x>4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\-1\le x<\frac{2}{7}\\x\in 0\\x>\frac{4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$x\in(-\infty;-1)\cup\left[-1;\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$$

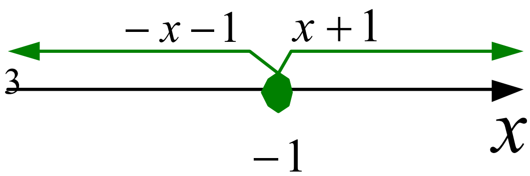
Ответ: $\left(-\infty;\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

✓ Если в уравнении и неравенстве встречается модуль в модуле, то сначала раскрывают внутренний модуль, а затем внешний модуль.

Пример 9. Решить неравенство $2|x-2|-||x+1|-1|\geq 3$.

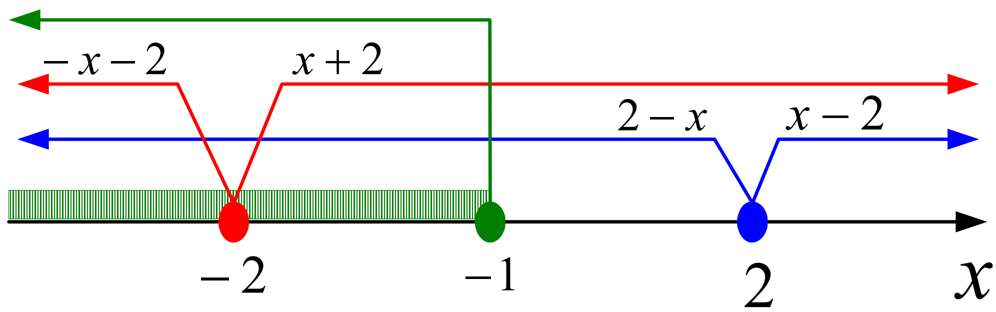
Решение: Нуль модуля $|x+1|$ разбивает числовую прямую на два промежутка, поэтому исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ 2|x-2|-|-x-2|\geq 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -1\\ 2|x-2|-|x|\geq 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ 2|x-2|-|x+2|\geq 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -1\\ 2|x-2|-|x|\geq 3\end{cases}\end{array}\right.$$



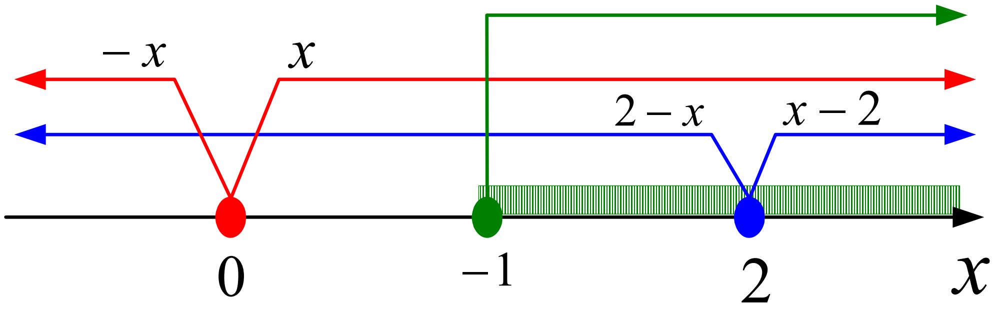
Рассмотрим каждую систему совокупности отдельно.

I. $\begin{cases}x<-1\\ 2|x-2|-|x+2|\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\ -2x+4+x+2\geq 3\end{cases}\\ \begin{cases}-2\leq x<-1\\ -2x+4-x-2\geq 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2\\ x\leq 3\end{cases}\\ \begin{cases}-2\leq x<-1\\ x\leq -\frac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\ -2\leq x<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x<-1\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)$$

II. $\begin{cases}x\geq -1\\ 2|x-2|-|x|\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x<0\\ 4-2x+x\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2\\ 4-2x-x\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ 2x-4-x\ge 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x<0\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2\\ x\le \frac{1}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ x\ge 7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ 0\le x\le \frac{1}{3}\\ x\ge 7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\le x\le \frac{1}{3}\\ x\ge 7\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x\in\left[-1;\frac{1}{3}\right]\cup[7;+\infty)$.

Объединяя решения I и II получим окончательный результат $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[7;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[7;+\infty)$.

✓ Решая некоторые примеры с модулем полезно помнить, что $|x|\ge 0$ для любого числа x. На этом основано решение следующего примера.

Пример 10. Решить уравнение

$$\left|x^2-x-6\right|+\left|x^3-8x^2+24x-27\right|=6x-x^2-9.$$

Решение. Использование при решении данного примера метода интервалов приведет к сложным вычислениям. Однако можно заметить, что $6x-x^2-9=-\left(x^2-6x+9\right)=-(x-3)^2\le 0$, для любого x, а сумма модулей в левой части уравнения неотрицательна для любого x. Следовательно, знак равенства между левой и правой частью уравнения возможен только в том случае, когда они обе равны нулю.

$\begin{cases} \left|x^2 - x - 6\right| + \left|x^3 - 8x^2 + 24x - 27\right| = 0 \\ -(x-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 3$ (корень второго уравнения подставляем в первое).

<u>Ответ:</u> $x = 3$.

Решение иррациональных уравнений.

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

При решении иррациональных уравнений обычно используют возведение в нужную степень или замену переменных.

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \qquad (1)$$

при его решении важную роль играет четность или нечетность n.

Если n ***- нечетное***, то уравнение (1) равносильно уравнению

$$f(x) = (g(x))^n.$$

Если n ***- четное***, то корень считается арифметическим. Поэтому необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений) $f(x) \geq 0$, а уравнение (1) будет равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Иногда встречается уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, которые решаются следующим образом:

$$n \text{ - нечетное} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$n \text{ - четное} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1$.

Решение. Так как в данном примере $n = 3$ (нечетное), то

$$x^3 - 2x + 1 = 1^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ответ: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{x^2+3x+1}=2$.

Решение. Так как $n=4$ и $2>0$, то

$$x^2+3x+1=2^4 \Leftrightarrow x^2+3x-15=0; \quad D=9+60=69; \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{69}}{2}.$$

Ответ: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{69}}{2}$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{2}$.

Пример 3. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{x+1}=2-x$.

Решение. Так как $n=2$ (четное), то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1=(2-x)^2 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4-4x+x^2 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

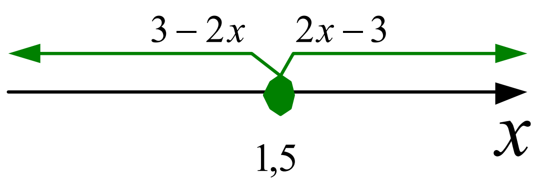
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2} \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: 1.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{|2x-3|}=\sqrt{x^2-3x+2}$.

Решение. Учитывая, что корень четной степени и модуль всегда неотрицателен, получим равносильное уравнение $|2x-3|=x^2-3x+2$.

Отметим нуль модуля на числовой прямой и получим равносильную исходному уравнению совокупность двух систем:



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1.5 \\ 3-2x=x^2-3x+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1.5 \\ 2x-3=x^2-3x+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1.5 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1.5 \\ x^2-5x+5=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1.5 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1.5 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

✓ Иногда иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{2x-9} - \sqrt{x-3} = 1$.

Решение: Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9} = 1 + \sqrt{x-3}$. Так как обе части полученного уравнения теперь неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$2x - 9 = 1 + x - 3 + 2\sqrt{x-3} \iff x - 7 = \sqrt{x-3}$. Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x-7 \ge 0 \\ (x-7)^2 = 4(x-3) \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 7 \\ x^2 - 14x + 49 = 4x - 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 7 \\ x^2 - 18x + 61 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \ge 7 \\ x = 9 \pm \sqrt{20} \end{cases} \iff x = 9 + \sqrt{20}.$$

Ответ: $x = 9 + \sqrt{20}$.

Пример 6. Решить уравнение: $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+4} = 0$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x \ge 0$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}$. Так как обе части уравнения неотрицательны, то при возведении в квадрат получим равносильное уравнение

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+9}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}\right)^2 \iff$$

$$x + 2\sqrt{x^2 + 9x} + x + 9 = x + 1 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 4} + x + 4 \iff$$

$2\sqrt{x^2 + 9x} + 4 = 2\sqrt{x^2 + 5x + 4} \iff \sqrt{x^2 + 9x} + 2 = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$. Возведем обе части уравнения в квадрат $x^2+9x+4\sqrt{x^2+9x}+4=x^2+5x+4 \quad \Leftrightarrow$ $4x+4\sqrt{x^2+9x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+9x}=-x$. Учитывая определение арифметического корня, правая часть уравнения должна быть неотрицательна, т.е. $-x\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\le 0$. Учитывая ОДЗ, получаем $\begin{cases} x\ge 0 \\ x\le 0 \end{cases}$, т.е. единственно возможный корень $x=0$. Подстановкой в последнее уравнение, равносильное исходному, убеждаемся в этом.

Ответ: $x=0$.

Пример 7. Решить уравнение $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-5}=10$.

Решение. Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению 4-ой степени, что не рационально. Поэтому запишем уравнение в виде $x^2+3x-5+4\sqrt{x^2+3x-5}=5$ и введем «новую» переменную $y=\sqrt{x^2+3x-5}$, $y\ge 0$. Получим $y^2+4y-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$. Вернемся к «старым» переменным $\sqrt{x^2+3x-5}=1$ или $\sqrt{x^2+3x-5}=-5$ (по определению арифметического корня – решений нет)

$$x^2+3x-5=1$$

$$x^2+3x-6=0$$

$$D=9+24=33\cdot$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$$

Ответ: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$, $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

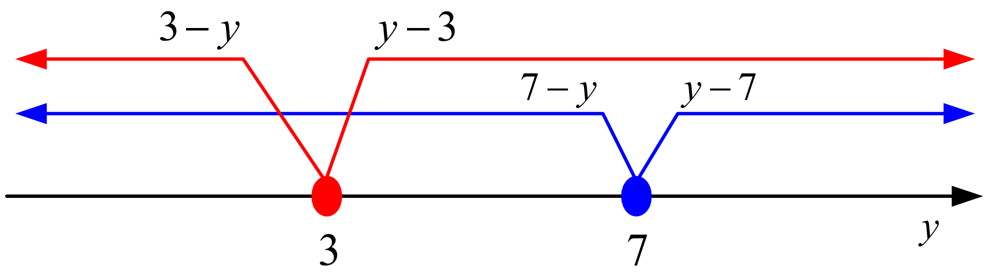
Пример 8. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+46-14\sqrt{x-3}}=4.$$

Решение.

Способ 1. Решать данное уравнение возведением в степень неудобно, поэтому введем новую переменную $y=\sqrt{x-3}$, $y\geq 0$. Тогда $x=y^2+3$ и уравнение примет вид:

$\sqrt{y^2+9-6y}+\sqrt{y^2+49-14y}=4\Leftrightarrow\sqrt{(y-3)^2}+\sqrt{(y-7)^2}=4$. Учитывая, что $\sqrt{a^2}=|a|$, то получим $|y-3|+|y-7|=4$. Решаем уравнение с модулем методом интервалов:



Исходное уравнение будет равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<3\\3-y-y+7=4\end{cases}\\ \begin{cases}3\leq y<7\\y-3-y+7=4\end{cases}\\ \begin{cases}y\geq 7\\y-3+y-7=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<3\\y=3\end{cases}\\ \begin{cases}3\leq y<7\\4=4\end{cases}\\ \begin{cases}y\geq 7\\y=7\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\leq y<7\\y=7\end{array}\right.\Leftrightarrow 3\leq y\leq 7.$$

Таким образом, решением уравнения $|y-3|+|y-7|=4$ является множество точек $[3;7]$. А так как $x=y^2+3$ и при $y>0$ y^2+3 строго возрастает, то решением исходного уравнения является множество точек отрезка $[12;52]$.

<u>Способ 2.</u> Решим уравнение $|y-3|+|y-7|=4$ другим способом. В соответствии с определением расстояния между двумя точками на числовой прямой имеем:

$$|y-3|=\rho(y;3),\ |y-7|=\rho(y;7).$$

В результате уравнение $|y-3|+|y-7|=4$ принимает следующий вид:

$$\rho(y;3)+\rho(y;7)=4.$$

Это означает, что на числовой прямой необходимо найти такую точку (точки) y, сумма расстояний от которой до точек $y=3$ и $y=7$ равна 4.

Нетрудно видеть, что любая точка y отрезка $[3;\,7]$ удовлетворяет этому условию, и поэтому решением уравнения $|y-3|+|y-7|=4$ являются все точки отрезка $[3;\,7]$, а исходного уравнения соответственно все точки отрезка $[12;\,52]$.

<u>Ответ:</u> Уравнение имеет бесконечно много решений.

✓ Иногда при решении иррационального уравнения возникает необходимость ввести не одну, а несколько «новых» переменных. Такая ситуация возникает, например, при решении уравнений, содержащих радикалы разных степеней.

<u>Пример 9.</u> Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{11-x}=1$.

<u>Решение.</u> Пусть $u=\sqrt{x-2}\ge 0$ и $v=\sqrt[3]{1-x}$. Тогда $u+v=1$. С другой стороны $u^2+v^3=x-2+11-x=9$. Получаем систему

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ (1-v)^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ v^3+v^2-2v-8=0 \end{cases}.$$

Решим последнее уравнение системы:

$$v^3+v^2-2v-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (v^3-8)+v(v-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(v-2)(v^2+2v+4+v)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad v=2.$$

Получим, что $v=2$. Тогда $u=1-v=-1<0$. По условию $u\ge 0$, а следовательно исходное уравнение решений не имеет.

<u>Ответ:</u> $\varnothing$.

<u>Пример 10.</u> Решить уравнение $\sqrt[3]{2x+7}+\sqrt[3]{6x+4}=7$.

<u>Решение.</u> Пусть $u=\sqrt[3]{2x+7}$, $v=\sqrt[3]{6x+7}$. Тогда

$$\begin{cases} u+v=7 \\ 3u^3-v^3=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=7-u \\ 3u^3-(7-u)^3-17=0 \end{cases}.$$

Решим второе уравнение

системы: $3u^3-(7-u)^3-17=0 \Leftrightarrow 4u^3-21u^2+147u-360=0$. Подбором находим, что $u=3$ - корень. Тогда $4u^3-21u^2+147u-360=(u-3)(4u^2-9u+120)$.

Следовательно,

$4u^3-21u^2+147u-360=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3 \\ 4u^2-9u+120=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow u=3$. При этом $v=4$. Так как $u=\sqrt[3]{2x+7}$, то $\sqrt[3]{2x+7}=3 \Leftrightarrow 2x+7=27 \Leftrightarrow x=10$.

Ответ: $x=10$.

✓ При решении некоторых иррациональных уравнений нахождение области допустимых значений входящих в уравнение неизвестных может существенно облегчить решение уравнения.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^3+\frac{8x^2}{3}-\frac{35x}{3}}+\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{13x-2x^3-x^2-6}=0.$$

Решение. Данное уравнение имеет весьма громоздкий вид и неясно как подойти к его решению. Поэтому найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x^3+\frac{8x^2}{3}-\frac{35x}{3}\ge 0 \\ x-6\ge 0 \\ 13x-2x^3-x^2-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+\frac{8x}{3}-\frac{35}{3}\right)\ge 0 \\ x\ge 6 \\ 2x^3+x^2-13x+6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5)\left(x-\frac{7}{3}\right)\ge 0 \\ x\ge 6 \\ (x-2)(2x^2+5x-3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in[-5;0]\cup\left[\frac{7}{3};+\infty\right) \\ x\in[6;+\infty) \\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[6;+\infty) \\ x\in(-\infty;-3]\cup\left[\frac{1}{2};2\right] \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Получим, что область допустимых значений данного уравнения является пустым множеством и, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 12. Решить уравнение

$$49+\sqrt{x^2-3x-28}+\sqrt[4]{x^2-7.5x+3.5}=14x-x^2.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^2-3x-28}+\sqrt[4]{x^2-7.5x+3.5}=-\left(x^2-14x+49\right),$$
$$\sqrt{x^2-3x-28}+\sqrt[4]{x^2-7.5x+3.5}=-(x-7)^2$$

Так как левая часть данного уравнения неотрицательна, а правая неположительная при любых значениях x, то равенство возможно только в том случае, когда они обе равны нулю. Легко убедится, что это возможно только при $x=7$.

Ответ: $x=7$.

✓ При решении иррациональных уравнений бывает полезно воспользоваться монотонностью функций.

Пример 13. Решить уравнение $\sqrt{2(x+6)}=6-\sqrt[3]{x+6}$.

Решение. Один корень данного уравнения $x=2$ легко найти подбором. Покажем, что других корней нет. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}=6$.

По свойству степенных функций функции $y_1(x)=\sqrt{2(x+6)}$ и $y_2(x)=\sqrt[3]{x+6}$ являются возрастающими на отрезке $[-6;\infty]$, где они обе определены. Поэтому их сумма $y(x)=\sqrt{2(x+6)}+\sqrt[3]{x+6}$ на этом отрезке также возрастает, следовательно она принимает любое значение (в том числе и 6) только один раз. Поэтому других корней нет.

Ответ: $x=2$.

Замечание. Пример 13 можно решать еще двумя способами.

2 способ. Введем «новую» переменную $y=\sqrt[6]{x+6}>0$. Получим $\sqrt{2}\cdot y^3=6-y^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}y^3+y^2-6=0\,\Big|\times 2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{2}\right)^3y^3+\left(\sqrt{2}\right)^2y^2-12=0$.

Пусть $t=\sqrt{2}y$. Тогда $t^3+t^2-12=0$. Подбором находим $t=2$. Тогда $t^3+t^2-12=(t-2)(t^2+3t+6)$. Соответственно, получим $t=2$ или $t^2+3t+6=0$ ($D<0$ - решений нет). Если $t=2$, то $y=\dfrac{t}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{x+6}=\sqrt{2}$. Тогда $x+6=2^3 \Leftrightarrow x=2$.

3 способ. Пусть $u=\sqrt{2(x+6)}>0$, $v=\sqrt[3]{x+6}$. Тогда получим систему:

$\begin{cases} u+v=6 \\ u^2-2v^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-v \\ (6-v)^2-2v^3=0 \end{cases}$. Решим второе уравнение системы:

$$36-12v+v^2-2v^3=0 \Leftrightarrow 2v^3-v^2+12v-36=0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=2 \\ 2v^2+3v+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow v=2.$$

Тогда $u=4>0$. Так как $v=2$, то $\sqrt[3]{x+6}=2 \Leftrightarrow x+6=8 \Leftrightarrow x=2$.

- ✓ При решении примера 13 способами I и II мы получили тот же ответ, что и при использовании монотонности степенной функции. Однако решения получились более громоздкими.
- ✓ Иногда при решении иррациональных уравнений удобно использовать тригонометрические подстановки (их следует применять если структура данного иррационального уравнения напоминает какую-то тригонометрическую формулу):
  - Если в уравнение входит $\sqrt{a^2-x^2}$, то полагаем $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$;
  - Если входит $\sqrt{a^2+x^2}$, то $x=a\,\mathrm{tg}\,t$;
  - Если входит $\sqrt{x^2-a^2}$, то $x=\dfrac{a}{\sin t}$ или $x=\dfrac{a}{\cos t}$.

Пример 14. Решить уравнение $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{2}x=1$.

Решение. Пусть $x=2\sin t$, где $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Заметим, что на отрезке

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\cos t \ge 0$, поэтому $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x$. Тогда

$$\sqrt{4-4\sin^2 t} + \sin t = 1 \Leftrightarrow 2\cos t + \sin t = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin t = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пусть $\gamma = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $\sin\gamma\cos t + \cos\gamma\sin t = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(t+\gamma) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$t+\gamma = (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$, где $n \in Z$, $t = -\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$.

Учитывая, что $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ получим два корня:

$$t_1 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$t_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Если $t_1 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, то $x_1 = 2\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$

$$= 2\left(\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) =$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}\right) = 2\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

Если $t_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, то

$$x_2 = 2\sin(t_2) = 2\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{6}{5}$, $x_2 = 2$.

Замечание. В некоторых случаях тригонометрическая подстановка – наиболее простой способ решения уравнения. При его использовании нужно помнить, что алгебраическое уравнение должно иметь ответ, записанный алгебраически (без тригонометрических функций).

Решение иррациональных неравенств.

Любое иррациональное неравенство в конечном итоге сводится к неравенству вида

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \qquad (1)$$

или

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \qquad (2)$$

Если n - нечетное, то неравенства (1) и (2) соответственно равносильны неравенствам $f(x) > (g(x))^n$ и $f(x) < (g(x))^n$.

Если n - четное, то

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{и} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^n \\ f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Поскольку большинство ошибок допускаются при решении неравенств, где n - четное, то рассмотрим этот случай на примерах.

Пример 1. Решить неравенство: $\sqrt{3x-5} > x-1$.

Решение.

$$\sqrt{3x-5} > x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x-5 > (x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x-5 > x^2-2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in (2;\,3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (2;\,3).$$

Ответ: $(2;\,3)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x^2-6x-7} < x+3$.

Решение. Имеем неравенство вида (2), поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-6x-7\ge 0 \\ x+3\ge 0 \\ x^2-6x-7<(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+1)\ge 0 \\ x\ge -3 \\ x^2-6x-7<x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup[7;+\infty) \\ x\in[-3;+\infty) \\ 12x>-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-3;1]\cup[7;+\infty) \\ x>-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in\left(-\frac{4}{3};-1\right]\cup[7;+\infty).$$

Ответ: $\left(-\dfrac{4}{3};-1\right]\cup[7;+\infty)$.

Если неравенство не является элементарным, т.е. его еще необходимо привести к виду (1) или (2), то для его решения можно использовать замену переменных и другие приемы, применяемые при решении иррациональных уравнений.

Пример 3. Найти наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{-4-x}{\sqrt{11-x}}\ge 2$.

Решение. Данное неравенство можно решать двумя способами.

1 способ:

$$\frac{-4-x}{\sqrt{11-x}}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{-4-x-2\sqrt{11-x}}{\sqrt{11-x}}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4-x-2\sqrt{11-x}\ge 0 \\ 11-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{11-x}\le -4-x \\ x<11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(11-x)\le(-4-x)^2 \\ x<11 \\ -4-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 44-4x\le 16+8x+x^2 \\ x<11 \\ x\le -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+12x-28\ge 0 \\ x\le -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+14)\ge 0 \\ x\le -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-14]\cup[2;+\infty) \\ x\in(-\infty;-4] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;-14].$$

Наибольшее целое решение $x=-14$.

2 способ: Введем «новую» переменную $y = \sqrt{11 - x}$, $y \geq 0$. Тогда $x = 11 - y^2$ и исходное неравенство примет вид:

$$\frac{-4 - (11 - y^2)}{y} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-4 - 11 + y^2 - 2y}{y} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2 - 2y - 15}{y} \geq 0.$$

Решаем данное неравенство методом интервалов. Корни числителя: 5 и -3, знаменателя 0.

Получаем, что $y \in [-3; 0) \cup [5; +\infty)$. А учитывая, что $y \geq 0$, окончательно имеем $y \in [5; +\infty)$. Так как $y = \sqrt{11 - x}$ и $y \in [5; +\infty)$, то $\sqrt{11 - x} \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 11 - x \geq 25 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -14$, т.е. $x \in (-\infty; -14]$. Таким образом, наибольшее целое решение $x = -14$.

Ответ: наибольшее целое решение $x = -14$.

Пример 4. Решить неравенство: $\sqrt{x - 2} + \sqrt{3 - x} > 1$.

Решение.

1. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in [2; 3]$.
2. Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то после возведения их в квадрат получим неравенство, равносильное исходному:

$$x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(3-x)} + 3 - x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2\sqrt{(x-2)(3-x)} > 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-2)(3-x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(3-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (2; 3).$$

Учитывая ОДЗ, $x \in (2; 3)$.

Ответ: $(2; 3)$.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3} + x}{x}} + \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3} - x}{x}} \geq \sqrt[4]{12}$.

Решение. Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2\sqrt{3}+x}{x}\geq 0\\ \dfrac{2\sqrt{3}-x}{x}\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x\in\left(0;\,2\sqrt{3}\right].$$

Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$\frac{2\sqrt{3}+x}{x}+2\sqrt{\frac{\left(2\sqrt{3}+x\right)\left(2\sqrt{3}-x\right)}{x^2}}+\frac{2\sqrt{3}-x}{x}\geq\sqrt{12} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4\sqrt{3}}{x}+2\sqrt{\frac{12-x^2}{x^2}}\geq\sqrt{12} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{x}+\sqrt{\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{x^2}-1}\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow\left|\frac{2\sqrt{3}}{x}=y>0\right|\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-1}\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{y^2-1}\geq\sqrt{3}-y.$$

Последнее неравенство относится к виду (1), поэтому оно равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{3}-y\geq 0\\ y^2-1\geq\left(\sqrt{3}-y\right)^2\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{3}-y<0\\ y^2-1\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\leq\sqrt{3}\\ y\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}\\ \begin{cases}y>\sqrt{3}\\ y\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leq y\leq\sqrt{3}\\ y\in\left(\sqrt{3};+\infty\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow y\in\left[\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right).$$

Учитывая, что $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{x}$, получим

$$\frac{2\sqrt{3}}{x}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{x}\geq\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{3-x}{x}\geq 0\Leftrightarrow x\in(0;3] \quad \left((0;3]\subset\left(0;2\sqrt{3}\right]\right).$$

Ответ: $(0;3]$.

Пример 6. Найти наибольшее решение неравенства

$$\frac{x(x-5)}{x-5-\sqrt{x-5}}\leq 7\sqrt{x-5}.$$

Решение. Введем «новую» переменную $y=\sqrt{x-5}\geq 0$. Тогда $x=y^2+5$. Наше неравенство примет вид: $\dfrac{\left(y^2+5\right)y^2}{y^2-y}\leq 7y$. Решим рациональное неравенство методом интервалов. $\dfrac{\left(y^2+5\right)y^2-7y\left(y^2-y\right)}{y(y-1)}\leq 0\Leftrightarrow$

$\frac{y^2(y-3)(y-4)}{y(y-1)} \le 0 \Leftrightarrow y \in (0;1) \cup [3;4]$. Вернемся к «старой» переменной

$$\left[\begin{array}{l} 0 < y < 1 \\ 3 \le y \le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \sqrt{x-5} < 1 \\ 3 \le \sqrt{x-5} \le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x-5 < 1 \\ 9 \le x-5 \le 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\left[\begin{array}{l} 5 < x < 6 \\ 14 \le x \le 21 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (5;6) \cup [14;21]$. Таким образом, наибольшим решением исходного неравенства является 21.

Ответ: 21.

Пример 7. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-4x-5} + \sqrt{x-x^2+2} > \sqrt{x^2+8x+15}.$$

Решение. Возведение данного неравенства в квадрат приведет к громоздким вычислениям. Поэтому найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-4x-5 \ge 0 \\ x-x^2+2 \ge 0 \\ x^2+8x+15 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-5) \ge 0 \\ -(x+1)(x-2) \ge 0 \\ (x+3)(x+5) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty;-1] \cup [5;+\infty) \\ x \in [-1;2] \\ x \in (-\infty;-5] \cup [-3;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1.$$

Получим, что ОДЗ данного неравенства состоит из единственной точки $x = -1$. Подставим $x = -1$ в неравенство и получим $0 > \sqrt{8}$, что неверно, поэтому исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.