[redacted] **Законы сохранения в механике**

Задача 1

На прямолинейном горизонтальном участке пути стоят $N = 5$ одинаковых вагонов. Промежутки между соседними вагонами одинаковы и равны $L = 30$ м. К крайнему вагону подкатывается еще один такой же вагон, имеющий скорость $v_0 = 2$ м/с. В результате N последовательных столкновений, в каждом из которых сталкивающиеся вагоны сцепляются вместе, все $N + 1$ вагонов соединяются в один состав. Найти время τ между первым и последним столкновениями. Силами сопротивления движению вагонов пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения импульса.

Указание 1. Примените закон сохранения импульса для каждого столкновения.

Указание 2. Найдите скорость состава после n-го столкновения и время между n-м и $(n + 1)$-м столкновениями.

Решение. Движущийся и покоящиеся вагоны представляют собой замкнутую механическую систему. Пусть m – масса одного вагона. По закону сохранения импульса для последовательных столкновений вагонов имеем $mv_0 = 2mv_1$, $2mv_1 = 3mv_2$, $3mv_2 = 4mv_3, \ldots$, где v_n – скорость состава после n-го столкновения. Отсюда следует, что $v_n = v_0/(n+1)$. Время, прошедшее между n-м и $(n + 1)$-м столкновениями, равно $t_n = \dfrac{L}{v_n} = \dfrac{L(n+1)}{v_0}$. Время, прошедшее между первым и последним (т.е. $(N - 1)$-м) столкновениями, $\tau = t_1 + t_2 + \ldots + t_{N-1} = \dfrac{L}{v_0}(2 + 3 + \ldots + N)$. По формуле для суммы арифметической прогрессии находим $\tau = \dfrac{L(N^2 + N - 2)}{2v_0} = 210$ с.

Ответ. $\tau = \dfrac{L(N^2 + N - 2)}{2v_0} = 210$ с.

Задача 2

Граната массой $m = 1$ кг разорвалась на высоте $h = 6$ м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и по модулю равна $v = 10$ м/с. Один из осколков массой $m_1 = 0{,}4$ кг полетел вертикально вниз и упал на Землю под местом разрыва со скоростью $v_1 = 40$ м/с. Чему равен модуль скорости v_2 второго осколка сразу после разрыва? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения импульса и кинематическим законом равноускоренного движения.

Указание 1. Используя закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления, найдите скорости осколков сразу после разрыва гранаты.

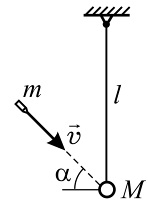
Указание 2. Запишите кинематическую связь между вертикальной проекцией скорости первого осколка сразу после разрыва и у поверхности Земли.

Решение. Обозначим через $v_{1н}$ модуль скорости первого осколка сразу после разрыва гранаты. Пренебрегая импульсом силы тяжести за время разрыва, по закону сохранения импульса имеем $mv = (m - m_1)v_{2x}$ (в проекции на горизонтальное направление), $m_1 v_{1н} = (m - m_1)v_{2y}$ (в проекции на вертикальное направление). Отсюда $v_{2x} = \dfrac{mv}{m - m_1}$, $v_{2y} = \dfrac{m_1 v_{1н}}{m - m_1}$. Скорость падения первого осколка на Землю и его скорость сразу после разрыва гранаты связаны кинематическим соотношением $v_1^2 = v_{1н}^2 + 2gh$. Следовательно, $v_{1н}^2 = v_1^2 - 2gh$. Учитывая, что $v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}$, находим $v_2 = \dfrac{1}{m - m_1}\sqrt{m^2 v^2 + m_1^2\left(v_1^2 - 2gh\right)} \approx 30{,}6$ м/с.

Ответ. $v_2 = \dfrac{1}{m - m_1}\sqrt{m^2 v^2 + m_1^2\left(v_1^2 - 2gh\right)} \approx 30{,}6$ м/с.

Задача 3

Шар массой $M=1$ кг подвешен на невесомом жестком стержне длиной $l=1{,}25$ м, шарнирно закрепленном за верхний конец. В шар попадает пуля массой $m=10$ г, летящая со скоростью $v=500$ м/с под углом $\alpha=45°$ к горизонту, и застревает в нем. Определить максимальный угол β отклонения стержня от вертикали. Ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2.



Идея. Воспользуйтесь законом сохранения импульса и законом сохранения механической энергии.

Указание 1. Используйте закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление.

Указание 2. Запишите закон сохранения механической энергии при движении шара с пулей.

Решение. Пусть u – модуль скорости шара с застрявшей в нем пулей непосредственно после соударения. По закону сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление имеем $mv\cos\alpha=(m+M)u$. При движении шара с пулей после соударения сохраняется механическая энергия, откуда следует, что высота подъема шара над нижней точкой $h=\dfrac{u^2}{2g}$. С другой стороны, $h=l(1-\cos\beta)$. Отсюда находим

$$\beta=\arccos\left[1-\frac{m^2v^2\cos^2\alpha}{2(m+M)^2gl}\right]\approx 60°.$$

Ответ. $\beta=\arccos\left[1-\dfrac{m^2v^2\cos^2\alpha}{2(m+M)^2gl}\right]\approx 60°.$

Задача 4

С горки высотой $h=2$ м с углом наклона $\alpha=45°$ начинают скатываться санки с нулевой начальной скоростью. Найти скорость v санок у основания горки, если на верхней половине горки коэффициент трения пренебрежимо мал, а на нижней половине коэффициент трения $\mu=0{,}1$.

Идея. Примените закон изменения механической энергии санок.

Указание. Найдите работу силы трения.

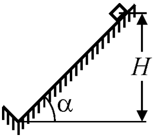
Решение. Длина участка горки, на котором коэффициент трения отличен от нуля, $S=\dfrac{h}{2\sin\alpha}$. Модуль силы трения, действующей на санки на этом участке,

$F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Работа силы трения $A_{тр} = -F_{тр}S = -\frac{1}{2}\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. По закону изменения механической энергии $\frac{mv^2}{2} - mgh = A_{тр}$. Отсюда $v = \sqrt{gh(2-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} \approx 6{,}1$ м/с.

Ответ. $v = \sqrt{gh(2-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} \approx 6{,}1$ м/с.

Задача 5

С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, соскальзывает без начальной скорости небольшое тело и ударяется о выступ, перпендикулярный наклонной плоскости. Считая удар о выступ абсолютно упругим, найти, на какую высоту h поднимется тело после удара. Начальная высота тела $H = 1$ м, коэффициент трения $\mu = 0{,}5$.



Идея. Примените закон изменения механической энергии тела.

Указание 1. Найдите работу силы трения.

Указание 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии.

Решение. Пусть m – масса тела. Модуль силы трения, действующей на тело, $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Путь, пройденный телом по наклонной плоскости от начального до конечного положения, $S = \frac{H+h}{\sin\alpha}$. Следовательно, работа силы трения $A_{тр} = -F_{тр}S = -\mu mg(H+h)\mathrm{ctg}\,\alpha$. Поскольку в начальном и конечном положениях скорость тела равна нулю, по закону изменения механической энергии $mgh - mgH = A_{тр}$. Отсюда находим $h = H \cdot \frac{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha} \approx 0{,}33$ м.

Ответ. $h = H \cdot \frac{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha} \approx 0{,}33$ м.

Задача 6

На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 100$ г. В брусок попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v_1 = 800$ м/с, и пробивает его насквозь. Скорость пули после вылета из бруска $v_2 = 200$ м/с. Какое количество энергии Q перешло во внутреннюю энергию тел в процессе удара? Трением бруска о плоскость пренебречь.

Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Используйте закон сохранения импульса и определите скорость бруска после вылета пули.

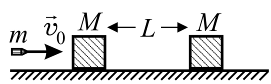
Указание 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии.

Решение. По закону сохранения импульса $mv_1 = mv_2 + Mu$, откуда скорость бруска после вылета из него пули $u = \frac{m}{M}(v_1 - v_2)$. По закону изменения механической энергии $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + Q$. Отсюда $Q = \frac{m}{2}(v_1 - v_2) \cdot \left[v_1 + v_2 - \frac{m}{M}(v_1 - v_2) \right] =$ $= 2820$ Дж.

Ответ. $Q = \frac{m}{2}(v_1 - v_2) \cdot \left[v_1 + v_2 - \frac{m}{M}(v_1 - v_2) \right] = 2820$ Дж.

Задача 7

На гладком горизонтальном столе покоятся два одинаковых кубика массой M каждый. В центр левого кубика попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v_0, направленной вдоль линии, соединяющей центры кубиков. Пробив насквозь левый кубик, пуля летит дальше со скоростью $v_0/2$, попадает в правый кубик и застревает в нем. Через какое время τ после попадания пули в левый кубик кубики столкнутся, если начальное расстояние между ними равно L? Размерами кубиков пренебречь.



Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения импульса при взаимодействии пули с кубиками.

Указание 2. Найдите относительную скорость кубиков после взаимодействия с пулей.

Указание 3. Используйте кинематические уравнения для движения кубиков.

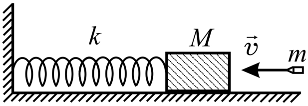
Решение. Пусть u_1 и u_2 – скорости брусков после соударения с пулей. Из закона сохранения импульса при взаимодействии пули с кубиками следуют равенства $mv_0 = Mu_1 + \frac{mv_0}{2}$, $\frac{mv_0}{2} = (m+M)u_2$, Отсюда $u_1 = \frac{m}{M} \cdot \frac{v_0}{2}$, $u_2 = \frac{m}{m+M} \cdot \frac{v_0}{2}$. Время полета пули с момента столкновения с левым кубиком до момента столкновения с правым кубиком равно $t_1 = \frac{2L}{v_0}$. За это время левый кубик сместился на расстояние

$x_1 = u_1 t_1 = \dfrac{m}{M} L$. Относительная скорость кубиков $u_{\text{отн}} = u_1 - u_2 = \dfrac{m^2 v_0}{2M(m+M)}$. Время, которое прошло с момента, когда пуля попала в правый кубик, до столкновения кубиков, $t_2 = \dfrac{L - x_1}{u_{\text{отн}}} = \dfrac{2L(M^2 - m^2)}{m^2 v_0}$. Искомое время $\tau = t_1 + t_2$. Объединяя записанные выражения, получаем $\tau = \dfrac{2L}{v_0} \cdot \dfrac{M^2}{m^2}$.

Ответ. $\tau = \dfrac{2L}{v_0} \cdot \dfrac{M^2}{m^2}$.

Задача 8

На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 4$ кг, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В центр бруска попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально и параллельно пружине, и застревает в нем. Определить скорость пули v, если максимальное сжатие пружины после удара составило $\Delta l = 30$ см. Трением бруска о плоскость пренебречь.



Идея. Примените закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения импульса при взаимодействии пули и бруска.

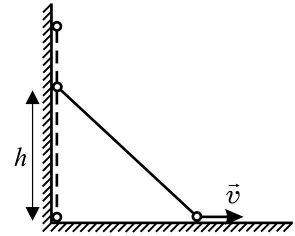
Указание 2. Воспользуйтесь законом сохранения механической энергии для системы тел «брусок – пуля – пружина».

Решение. Поскольку соударение пули с бруском является кратковременным, смещение бруска за время соударения пренебрежимо мало и сила упругости в момент соударения не возникает. Следовательно, суммарный импульс пули и бруска во время соударения сохраняется: $mv = (m+M)u$, где u – скорость бруска с застрявшей в нем пулей сразу после соударения. При последующем движении бруска и пули сохраняется механическая энергия, причем при достижении максимального сжатия пружины брусок с пулей останавливается. Следовательно, $\dfrac{(m+M)u^2}{2} = \dfrac{k\Delta l^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $v = \dfrac{\Delta l}{m}\sqrt{(M+m)k} = 600$ м/с.

Ответ. $v = \dfrac{\Delta l}{m}\sqrt{(M+m)k} = 600$ м/с.

Задача 9

Два одинаковых маленьких шарика соединены невесомым жестким стержнем длиной $l = 60$ см. Стержень стоит вертикально вплотную к вертикальной плоскости. При смещении нижнего шарика вправо на малое расстояние система из шариков приходит в движение в плоскости рисунка. Найти модуль скорости нижнего шарика v в момент времени, когда верхний шарик находится на высоте $h = 40$ см над горизонтальной плоскостью. Считать, что при движении шарики не отрываются от плоскостей, трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

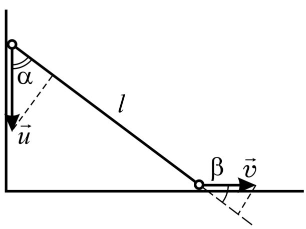


Идея. Примените закон сохранения механической энергии.

Указание 1. Определите связь между модулями скоростей концов стержня и углом, который составляет стержень с вертикальной стенкой.

Указание 2. Используйте закон сохранения механической энергии.

Решение. Поскольку длина стержня постоянна, проекции скоростей шариков на направление стержня в каждый момент времени совпадают. Обозначив через $\vec{u}$ скорость верхнего шарика, имеем (см. рисунок) $u\cos\alpha = v\cos\beta = v\sin\alpha$, откуда $u = v\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h}$.

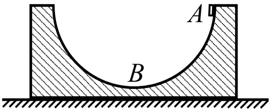


Из закона сохранения механической энергии шариков следует равенство $mgl = mgh + \dfrac{m(u^2 + v^2)}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $v = \dfrac{h}{l}\sqrt{2g(l-h)} \approx 1{,}33$ м/с.

Ответ. $v = \dfrac{h}{l}\sqrt{2g(l-h)} \approx 1{,}33$ м/с.

Задача 10

Сферическая чашка массой $M = 200$ г покоится на гладкой горизонтальной поверхности. По внутренней поверхности чашки из положения A начинает скользить без начальной скорости маленький брусок массой $m = 20$ г. Какую скорость v будет иметь чашка в тот момент, когда брусок достигнет наинизшей точки (положение B), если радиус чашки $R = 8$ см. Трением между всеми поверхностями пренебречь.

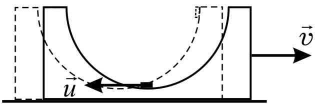


Идея. Примените законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Изобразите положение тел в тот момент, когда брусок достигает низшей точки.

Указание 2. Запишите законы сохранения импульса и энергии.

Решение. Положение тел в момент, когда брусок достигает низшей точки, изображено на рисунке сплошными линиями. Скорость бруска $\vec{u}$ направлена в этот момент горизонтально. Из законов сохранения импульса и механической энергии имеем $mu = Mv$, $mgR = \dfrac{mu^2}{2} + \dfrac{Mv^2}{2}$. Исключая u, получаем



$v = m\sqrt{\dfrac{2gR}{M(m+M)}} \approx 11{,}9$ см/с.

Ответ. $v = m\sqrt{\dfrac{2gR}{M(m+M)}} \approx 11{,}9$ см/с.

Задача 11

Человек массой $M = 70$ кг, неподвижно стоявший на коньках, бросил вперед в горизонтальном направлении снежный ком массой $m = 3{,}5$ кг. Какую работу A совершил человек при броске, если после броска он откатился назад на расстояние $S = 0{,}2$ м? Коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}01$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Используйте закон сохранения импульса в системе «человек – снежный ком» при броске.

Указание 2. Запишите закон изменения механической энергии системы при броске снежного кома.

Решение. Пусть v и u – скорости снежного кома и человека сразу после броска. Совершенная при броске работа потрачена на сообщение кинетической энергии как снежному кому, так и самому человеку: $A = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{Mu^2}{2}$. Считая бросок кратковременным, можно пренебречь импульсом силы трения за время броска. Поэтому в момент броска сохраняется суммарный импульс снежного кома и человека, откуда следует, что $mv = Mu$. Закон изменения механической энергии при движении человека после броска дает соотношение $\dfrac{Mu^2}{2} = \mu MgS$. Объединяя записанные равенства, получаем $A = M\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)\cdot \mu gS = 29{,}4$ Дж.

О т в е т. $A = M\left(1+\dfrac{M}{m}\right)\cdot \mu g S = 29{,}4$ Дж.

Задача 12

При броске тела от поверхности Земли под некоторым углом к горизонту была совершена работа $A = 58{,}8$ Дж. На каком расстоянии S от места бросания тело упало на Землю, если его масса $m = 1$ кг, а максимальная высота подъема в полете $H = 3$ м? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

И д е я. Используйте закон изменения механической энергии и кинематические соотношения для движения тела, брошенного под углом к горизонту.

У к а з а н и е 1. Примените закон изменения механической энергии и определите модуль начальной скорости тела.

У к а з а н и е 2. Воспользуйтесь кинематическими соотношениями для движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Р е ш е н и е. Обозначим через v_0 модуль скорости тела после броска. По условию $\dfrac{mv_0^2}{2} = A$, откуда $v_0 = \sqrt{\dfrac{2A}{m}}$. Максимальная высота подъема тела, брошенного под углом α к горизонту, $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$. Отсюда $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{2gH}{v_0^2}} = \sqrt{\dfrac{mgH}{A}}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{mgH}{A}}$. Учитывая, что дальность полета тела $L = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$, находим $S = 4H\sqrt{\dfrac{A}{mgH} - 1} = 12$ м.

О т в е т. $S = 4H\sqrt{\dfrac{A}{mgH} - 1} = 12$ м.

Задача 13

Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 350$ км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на $\Delta h = 25$ км. На какую величину η изменилась при этом кинетическая энергия спутника по отношению к ее первоначальному значению? Радиус Земли $R = 6400$ км.

И д е я. Используйте определение кинетической энергии тела.

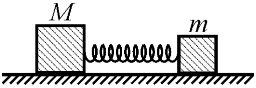
Указание. Для определения скорости движения спутника воспользуйтесь уравнением, описывающим движение тела по окружности, и законом всемирного тяготения.

Решение. Уравнение движения спутника по круговой орбите под действием силы притяжения Земли имеет вид $\frac{mv_1^2}{R+h}=G\frac{mM}{(R+h)^2}$, где m – масса спутника, v_1 – его скорость на первоначальной орбите, M – масса Земли, R – ее радиус, G – гравитационная постоянная. Отсюда $v_1^2=\frac{GM}{R+h}$. Аналогично $v_2^2=\frac{GM}{R+h-\Delta h}$, где v_2 – скорость спутника на новой орбите. Учитывая, что искомая величина $\eta=\frac{E_2-E_1}{E_1}=\frac{v_2^2-v_1^2}{v_1^2}$, получаем ответ: $\eta=\frac{\Delta h}{R+h-\Delta h}=3{,}7\cdot 10^{-3}$. В результате этого маневра кинетическая энергия спутника увеличилась.

Ответ. $\eta=\frac{\Delta h}{R+h-\Delta h}=3{,}7\cdot 10^{-3}$.

Задача 14

Между двумя кубиками массами m и M находится сжатая пружина. Если кубик массой M удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v. С какой скоростью v_1 будет двигаться кубик массой m, если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь законами сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Запишите закон сохранения механической энергии для обоих случаев, рассматриваемых в условии задачи.

Указание 2. Примените закон сохранения импульса.

Решение. Обозначим через $E_п$ энергию сжатой пружины. Имеем $E_п=\frac{mv^2}{2}$, $E_п=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}$, где v_1 и v_2 – скорости кубиков, которые они приобретают, когда их отпускают одновременно. По закону сохранения импульса $mv_1=Mv_2$. Объединяя записанные выражения, получаем $v_1=v\sqrt{\frac{M}{m+M}}$.

Ответ. $v_1=v\sqrt{\frac{M}{m+M}}$.

Задача 15

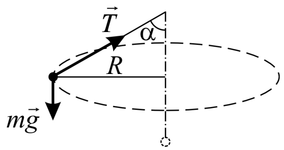
Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Его приводят в движение так, что он обращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, которая находится на расстоянии $l/2$ от точки подвеса. Какую работу A нужно совершить для сообщения шарику такого движения?

Идея. Примените закон изменения механической энергии.

Указание 1. Запишите уравнения движения шарика по окружности.

Указание 2. Найдите кинетическую и потенциальную энергии шарика.

Решение. Шарик движется по горизонтальной окружности под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{T}$ – сила натяжения нити. В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси неподвижной системы координат уравнения движения шарика имеют вид: $\dfrac{mv^2}{R} = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$.

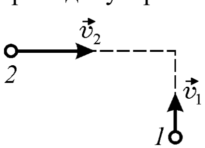


Учитывая, что $R = l\sin\alpha$, находим кинетическую энергию шарика $E_{\text{к}} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mgl}{2}\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$, Потенциальная энергия шарика относительно положения, занимаемого им в неподвижном состоянии, $E_{\text{п}} = mgl\cos\alpha$. По закону изменения механической энергии искомая работа $A = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = mgl\cos\alpha\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)$. Поскольку по условию $\alpha = 60°$, ответ имеет вид $A = \dfrac{5}{4}mgl \approx 1{,}2$ Дж.

Ответ. $A = \dfrac{5}{4}mgl \approx 1{,}2$ Дж.

Задача 16

Пластилиновые шарики имеют одинаковые массы m и взаимно перпендикулярные скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, лежащие в одной плоскости. В результате столкновения шарики слипаются и движутся как одно целое. Какое количество теплоты Q выделилось при столкновении, если $m = 1$ г, $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 4$ м/с?

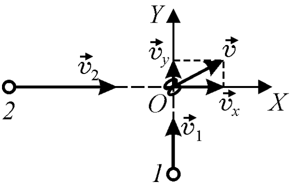


Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Запишите закон сохранения импульса и найдите скорость слипшихся шариков.

Указание 2. Примените закон изменения механической энергии шариков.

Решение. Поскольку при столкновении шариков сохраняется импульс, в проекциях на оси OX и OY координатной системы, изображенной на рисунке, имеем: $mv_2 = 2mv_x$, $mv_1 = 2mv_y$. Здесь v_x и v_y – проекции скорости $\vec{v}$ тела, образованного слипшимися шариками после удара. Отсюда $v^2 = \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2)$. По закону изменения механической энергии количество теплоты, выделившееся при ударе, $Q = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{2mv^2}{2} = \frac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 5 \cdot 10^{-3}$ Дж.



Ответ. $Q = \frac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 17

Два тела массами $m_1 = 3{,}8$ г и $m_2 = 6$ г прикреплены к невесомой нити, перекинутой через блок с неподвижной осью. В начальный момент времени груз массой m_2 находится на высоте $h = 1$ м над горизонтальной поверхностью, и оба груза неподвижны. Затем грузы отпускают. Определить количество теплоты Q, выделившейся при неупругом ударе тела массой m_2 о горизонтальную поверхность, если это тело сразу после удара останавливается. Силами трения пренебречь. Блок считать невесомым.

Идея. Используйте закон сохранения и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения механической энергии при движении шариков.

Указание 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии при неупругом ударе.

Решение. По закону сохранения механической энергии при движении шариков имеем $(m_1 + m_2)gh = 2m_1gh + \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}$. Отсюда скорость шариков в конце движения (перед ударом шарика m_2 о горизонтальную поверхность) $v = \sqrt{2gh\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}$. Искомое количество теплоты $Q = \frac{m_2v^2}{2}$. Объединяя полученные выражения, находим $Q = m_2 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot gh = 1{,}32 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Ответ. $Q = m_2 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot gh = 1{,}32 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Задача 18

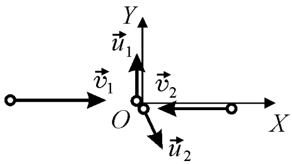
Шарик *1* массой $m = 200$ г движется равномерно со скоростью $v_1 = 10$ м/с. Навстречу ему движется шарик *2* такой же массой со скоростью $v_2 = 8$ м/с. После соударения шарик *1* стал двигаться перпендикулярно направлению его движения до соударения со скоростью $u_1 = 5$ м/с. Какое количество теплоты Q выделилось при соударении шариков?

Идея. Используйте закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Запишите закон сохранения импульса в проекции на взаимно перпендикулярные неподвижные координатные оси.

Указание 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии.

Решение. Из условия задачи ясно, что шарики испытывают нецентральное соударение (см. рисунок). Введем координатную систему, ось OX которой направим вдоль линии первоначального движения шариков, а ось OY – перпендикулярно этой линии, и запишем закон сохранения импульса в проекции на эти оси $mv_1 - mv_2 = mu_{2x}$, $mu_1 - mu_{2y} = 0$. Выражая отсюда проекции скорости второго шарика после удара $\vec{u}_2$, находим



квадрат ее модуля: $u_2^2 = (v_1 - v_2)^2 + u_1^2$. Выделившееся при ударе количество теплоты равно убыли кинетической энергии шариков: $Q = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2} - \left(\dfrac{mu_1^2}{2} + \dfrac{mu_2^2}{2}\right)$. Подставляя сюда найденное выше выражение для u_2^2, получаем $Q = m(v_1 v_2 - u_1^2) = 11$ Дж.

Ответ. $Q = m(v_1 v_2 - u_1^2) = 11$ Дж.

Задача 19

На гладком столе покоится брусок массой $M = 20$ г, прикрепленный пружиной жесткостью $k = 50$ Н/м к стене. В брусок ударяется шарик массой $m = 10$ г, движущийся по столу со скоростью $v_0 = 30$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Считая соударение шарика и бруска упругим, найти амплитуду A колебаний бруска после удара.

Идея. Примените законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Используя законы сохранения импульса и механической энергии при упругом ударе, найдите скорость бруска после соударения.

Указание 2. Воспользуйтесь законом сохранения энергии при свободных колебаниях без затухания.

Решение. Пусть после соударения шарик и брусок приобретают скорости u_1 и u_2 соответственно. По законам сохранения импульса и механической энергии имеем $mv_0 = mu_1 + Mu_2$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}$. Из этой системы находим $u_2 = \frac{2m}{m+M}v_0$. При свободных гармонических колебаниях сохраняется механическая энергия, поэтому $\frac{mu_2^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. Отсюда находим $A = \frac{2v_0}{(1+M/m)}\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}4$ м.

Ответ. $A = \frac{2v_0}{(1+M/m)}\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}4$ м.

Задача 20

На горизонтальном участке пути длиной $L = 3$ км скорость поезда увеличилась от $v_1 = 36$ км/ч до $v_2 = 72$ км/ч. Какую массу топлива m израсходовал двигатель локомотива на этом участке? Суммарная масса поезда и локомотива $M = 1000$ т, сила сопротивления движению поезда пропорциональна его весу с коэффициентом пропорциональности $\mu = 0{,}005$, удельная теплота сгорания топлива $h = 42$ МДж/кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте закон изменения механической энергии.

Указание 1. Определите, на что затрачена совершенная двигателем работа.

Указание 2. Выразите работу, совершенную двигателем, через количество теплоты, выделившееся при сгорании топлива, и КПД двигателя.

Решение. Работа двигателя локомотива на данном участке пути затрачена на увеличение кинетической энергии поезда и на преодоление силы сопротивления: $A = \frac{M}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \mu MgL$. С другой стороны, $A = hm\frac{\eta}{100\%}$. Откуда находим $m = \frac{100\%}{\eta h}M\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \mu gL\right) \approx 23{,}8$ кг.

Ответ. $m = \frac{100\%}{\eta h}M\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \mu gL\right) \approx 23{,}8$ кг.

Задача 21

Система из двух шаров массами $m_1 = 0{,}6$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг, соединенных невесомой спицей длиной $l = 0{,}5$ м, вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной спице, с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Найти энергию системы E. Размерами шаров по сравнению с длиной спицы пренебречь.

Идея. Используйте выражение для кинетической энергии системы тел.

Указание 1. Запишите формулу для кинетической энергии шаров.

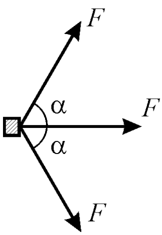
Указание 2. Найдите расстояния от шаров до центра тяжести системы.

Решение. Поскольку центр тяжести системы неподвижен, потенциальная энергия системы не изменяется и ее можно принять равной нулю. Кинетическая энергия шаров рассчитывается по формуле $E = \frac{m_1 v_2^2}{2} + \frac{m_1 v_2^2}{2}$, где $v_1 = \omega l_1$ и $v_2 = \omega l_2$ – линейные скорости шаров, l_1 и l_2 – расстояния от каждого из шаров до центра тяжести системы. Из определения центра тяжести следует, что $m_1 l_1 = m_2 l_2$, а по условию $l_1 + l_2 = l$. Отсюда находим $l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$, $l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \omega^2 l^2 = 0{,}1$ Дж.

Ответ. $E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \omega^2 l^2 = 0{,}1$ Дж.

Задача 22

На горизонтальной шероховатой поверхности находится маленький брусок. Если на брусок подействовать в течение очень короткого промежутка времени горизонтальной силой F, значительно превышающей силу трения скольжения, то после этого брусок пройдет до остановки путь S_0. Какой путь S пройдет до остановки этот брусок, если в течение того же промежутка времени на него одновременно подействовать тремя горизонтальными силами F, две из которых направлены под углами $\alpha = 60°$ к третьей?



Идея. Используйте законы изменения импульса и механической энергии.

Указание 1. Запишите законы изменения импульса и механической энергии в случае действия на брусок одной силы F.

Указание 2. Определите равнодействующую трех сил, действующих на брусок, и снова воспользуйтесь законами изменения импульса и механической энергии.

Решение. Обозначим через τ время действия силы F. По закону изменения импульса имеем $F\tau = mv_0$, где m – масса бруска, v_0 – скорость, которую он приобретает в результате действия силы F (импульсом силы трения за время τ по условию можно пренебречь). По закону изменения механической энергии имеем $\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgS_0$, где μ – коэффициент трения. Величина равнодействующей трех сил, действующих на брусок одновременно и направленных, как показано на рисунке, равна $F_\Sigma = F(1+2\cos\alpha)$. Законы изменения импульса и энергии в этом случае дают равенства $F_\Sigma\tau = mv$, $\frac{mv^2}{2} = \mu mgS$. Объединяя записанные выражения, находим, что $S = (1+2\cos\alpha)^2 S_0 = 4S_0$.

Ответ. $S = (1+2\cos\alpha)^2 S_0 = 4S_0$.

Задача 23

Молекулярный пучок составляют одинаковые молекулы, движущиеся с одинаковыми скоростями $v = 500$ м/с. Масса молекулы $m = 4{,}8 \cdot 10^{-26}$ кг. На пути пучка установлен экран, плоскость которого перпендикулярна вектору $\vec{v}$. Найти давление p, оказываемое пучком на экран. Число молекул в единице объема пучка $n = 3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Удар молекулы об экран считать абсолютно упругим.

Идея. Используйте определение импульса силы и закон изменения импульса при упругом ударе.

Указание 1. Найдите величину изменения импульса при упругом соударении с экраном одной молекулы.

Указание 2. Примените закон изменения импульса для N ударяющихся молекул.

Указание 3. Воспользуйтесь определением давления.

Решение. При абсолютно упругом ударе об экран импульс молекулы меняется на величину, по модулю равную $\Delta p_1 = 2mv$. По второму закону Ньютона модуль импульса силы, действующей на экран со стороны молекул, $F\Delta t = N\Delta p_1$, где $N = nSv\Delta t$ – число молекул, ударяющихся об экран за время Δt, S – площадь экрана. Из записанных равенств следует, что $F = 2mnv^2 S$. Учитывая, что давление $p = F/S$, получаем $p = 2nmv^2 = 720$ кПа.

Ответ. $p = 720$ кПа.

Задача 24

Правая чаша рычажных весов находится под мелким моросящим дождем, а левая укрыта от дождя навесом. Каждая чаша представляет собой тонкостенную цилиндрическую емкость с площадью дна $S = 0{,}05$ м^2 и высотой бортика $h = 1$ мм. Интенсивность равномерно падающего дождя такова, что дождевая вода целиком заполняет предварительно опорожненную чашу весов за время $\tau = 30$ с. Какой массы m гирю нужно положить на левую чашу весов, чтобы уравновесить весы в случае, когда правая чаша заполнена дождевой водой до краев? Капли дождя падают вертикально со скоростью $v = 3$ м/с. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Соударение капель с водой в чаше считать неупругим.

Идея. Используйте закон изменения импульса капель при неупругом соударении с водой.

Указание 1. Запишите закон изменения импульса при неупругом соударении капель с водой, попадающих в чашу за время Δt.

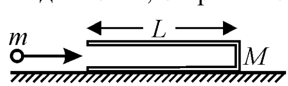
Указание 2. Определите силу, действующую на полностью заполненную чашу весов, учитывающую силу давления падающих капель.

Решение. На правую чашу весов, заполненную водой до краев, действует сила $F = Mg + N$, где $M = \rho Sh$ – масса воды в этой чаше, N – сила давления падающих капель дождя. Поскольку соударение капель с водой, находящейся в чаше, является неупругим, по второму закону Ньютона имеем $\Delta m \cdot v = (N - \Delta m \cdot g)\Delta t$, где $\Delta m = \dfrac{M}{\tau}\Delta t$ – масса дождевых капель, попадающих в чашу за малое время Δt. Отсюда $N\Delta t = \dfrac{Mv}{\tau}\Delta t + \dfrac{Mg}{\tau}\Delta t^2$. Учитывая малость Δt, находим, что приближенно $N \approx \dfrac{Mv}{\tau}$. Весы будут уравновешены, если масса гири на левой чаше $m = \dfrac{F}{g} = \rho Sh + \dfrac{N}{g}$. Объединяя записанные выражения, получаем $m = \rho Sh\left(1 + \dfrac{v}{g\tau}\right) = 50{,}5$ г.

Ответ. $m = \rho Sh\left(1 + \dfrac{v}{g\tau}\right) = 50{,}5$ г.

Задача 25

На гладком горизонтальном столе покоится трубка массой M и длиной L, закрытая с одного торца. В открытый конец трубки влетает маленький шарик массой m со скоростью, направленной вдоль оси трубки. После упругого удара о закрытый торец трубки шарик вылетает наружу. Какой путь S относительно стола пройдет шарик за время, которое он будет находиться внутри трубки? Размером шарика и трением между всеми поверхностями пренебречь.



Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Запишите законы сохранения импульса и кинетической энергии в системе тел «шарик + трубка».

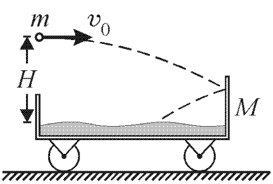
Указание 2. Определите относительную скорость шарика и трубки после удара.

Решение. Пусть начальная скорость шарика v_0. Из законов сохранения импульса и кинетической энергии в системе «шарик + трубка» следует, что $mv_0 = MV + mv$, $mv_0^2 = MV^2 + mv^2$, где V и v – скорости трубки и шарика после соударения. Из этой системы находим $V = \frac{2m}{M+m}v_0$, $v = \frac{m-M}{M+m}v_0$. Поскольку относительная скорость этих тел после удара $V_{\text{отн}} = V - v = v_0$, время, которое шарик движется после соударения внутри трубки, $\tau = \frac{L}{V_{\text{отн}}} = \frac{L}{v_0}$. За это время он проходит путь $S' = |v|\tau = \frac{|m-M|}{M+m}L$. Полный путь, пройденный шариком, $S = L + S'$. Отсюда находим $S = L\left(1 + \frac{|m-M|}{M+m}\right)$.

Ответ. $S = L\left(1 + \frac{|m-M|}{M+m}\right)$.

Задача 26

На горизонтальных рельсах стоит тележка массой M. В нее бросают шар массой m,



который ударяется о правую стенку тележки и падает на ее дно, застревая в насыпанном на дно песке. В момент, когда шар пролетал над левой стенкой тележки, его скорость была равна $v_0 = 4$ м/с и направлена горизонтально, а высота над поверхностью песка составляла $H = 1{,}8$ м. Какой путь S пройдет тележка к моменту падения шара на песок, если длина тележки $L = 2$ м? Удар шара о стенку считать абсолютно упругим, стенку и шар – гладкими, трением при движении тележки и размером шара пренебречь. При расчете положить $m = M/9$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте законы сохранения импульса и энергии при ударе шара о стенку тележки.

Указание 1. Запишите закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось и закон сохранения механической энергии. Найдите скорость тележки после удара.

Указание 2. Из кинематических уравнений определите время движения тележки до момента падения шара на песок.

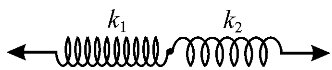
Решение. При упругом ударе шара о правую стенку тележки сохраняются горизонтальная проекция импульса и механическая энергия. Имеем $mv_0 = Mu - mv$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$, где u – скорость тележки, v – горизонтальная проекция скорости шара после удара. Из этой системы находим $u = \frac{2m}{M+m}v_0 = 0{,}2v_0$. Поскольку вертикальная проекция скорости шара при ударе о гладкую стенку не меняется, время τ

движения мяча с момента, когда он пролетает над левой стенкой, до попадания в песок равно времени свободного падения с высоты H: $\tau = \sqrt{2H/g}$. Время движения мяча с момента, когда он пролетает над левой стенкой, до удара о правую стенку $\tau_1 = L/v_0$. Приобретя после удара скорость u, тележка пройдет до момента падения шара на песок путь $S = u(\tau - \tau_1)$. Отсюда находим $S = \dfrac{2mv_0}{M+m}\left(\sqrt{\dfrac{2H}{g}} - \dfrac{L}{v_0}\right) = 8$ см.

Ответ. $S = \dfrac{2mv_0}{M+m}\left(\sqrt{\dfrac{2H}{g}} - \dfrac{L}{v_0}\right) = 8$ см.

Задача 27

Две пружины, соединенные, как показано на рисунке, имеют жесткости $k_1 = 15$ Н/м и $k_2 = 10$ Н/м. Пружины растянули за свободные концы в разные стороны, совершив работу $A = 1$ Дж. Каковы потенциальные энергии E_1 и E_2 деформации каждой из пружин по отдельности?



Идея. Воспользуйтесь законом Гука и выражением для потенциальной энергии упругой деформации пружины.

Указание 1. Запишите закон Гука для системы пружин.

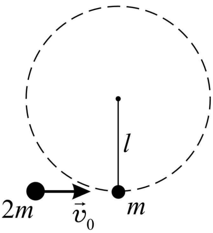
Указание 2. Определите эквивалентную жесткость двух последовательно соединенных пружин и найдите потенциальные энергии деформации каждой пружины.

Решение. При растяжении пружин, соединенных последовательно, возникающие в них силы упругости одинаковы. Следовательно, $k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2$, где Δl_1 и Δl_2 – абсолютные удлинения пружин. Их сумма равна общему удлинению Δl системы: $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$. Отсюда $\Delta l_1 = \Delta l \dfrac{k_2}{k_1 + k_2}$, $\Delta l_2 = \Delta l \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}$. Жесткость двух пружин, соединенных последовательно, $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Поэтому работа по их растяжению $A = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot \dfrac{\Delta l^2}{2}$, откуда $\dfrac{\Delta l^2}{2} = \dfrac{A(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$. Потенциальные энергии деформации пружин $E_1 = \dfrac{k_1 \Delta l_1^2}{2}$, $E_2 = \dfrac{k_2 \Delta l_2^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $E_1 = A\dfrac{k_2}{k_1 + k_2} = 0{,}4$ Дж, $E_2 = A\dfrac{k_1}{k_1 + k_2} = 0{,}6$ Дж.

Ответ. $E_1 = A\dfrac{k_2}{k_1 + k_2} = 0{,}4$ Дж, $E_2 = A\dfrac{k_1}{k_1 + k_2} = 0{,}6$ Дж.

Задача 28

Шарик массой m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м. В него ударяется шарик массой $2m$, летящий в плоскости рисунка со скоростью $\vec{v}_0$ так, что вектор скорости направлен горизонтально вдоль линии, соединяющей центры шаров. Каким должен быть модуль скорости v_0, чтобы после удара шарик массой m совершил полный оборот по окружности в вертикальной плоскости? Удар считать абсолютно упругим, силы трения не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения проекции импульса на горизонтальное направление и законом сохранения механической энергии при соударении шариков.

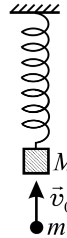
Указание 2. Запишите закон сохранения механической энергии для шарика, закрепленного на нити, после удара.

Указание 3. Определите условие, при котором скорость, сообщаемая шарику для его полного оборота, будет минимальной.

Решение. При соударении шариков сохраняется проекция импульса на горизонтальное направление и кинетическая энергия системы. Обозначив через v_1 и v_2 модули скоростей шариков m и $2m$ после удара, имеем $2mv_0 = mv_1 + 2mv_2$, $2m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{v_1^2}{2} + 2m\frac{v_2^2}{2}$. Так как сила натяжения нити T работу не совершает, при движении шарика m после удара сохраняется его полная механическая энергия. Для нижней и верхней точек окружности, по которой движется этот шарик, получаем $m\frac{v_1^2}{2} = 2mgl + m\frac{u^2}{2}$, где u – модуль скорости шарика в верхней точке. Уравнение движения шарика в верхней точке окружности имеет вид $m\frac{u^2}{l} = mg + T$. Отсюда следует, что u минимально, если натяжение нити в верхней точке обращается в нуль, т.е. $m\frac{u_{\min}^2}{l} = mg$. Объединяя записанные выражения, получаем $v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{5gl} = 5{,}25$ м/с.

Ответ. $v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{5gl} = 5{,}25$ м/с.

Задача



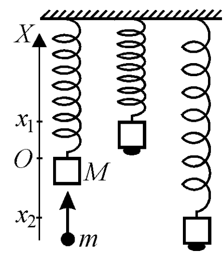
Брусок массой $M = 100$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k = 1$ Н/м. Снизу в него попадает пластилиновый шарик массой $m = 1$ г, летящий вертикально вверх со скоростью $v_0 = 2{,}5$ м/с, и прилипает к бруску. Найти амплитуду A возникающих при этом гармонических колебаний. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии, а также определение амплитуды колебаний.

Указание 1. Примените закон сохранения импульса и найдите скорость бруска после прилипания к нему пластилинового шарика.

Указание 2. Используйте закон сохранения механической энергии и найдите координаты верхнего и нижнего положения бруска. Воспользуйтесь определением амплитуды колебаний.

Решение. Выберем начало отсчета в положении равновесия бруска до прилипания шарика, ось OX направим вверх. В этом состоянии пружина растянута на величину $x_0 = Mg/k$. По закону сохранения импульса в момент прилипания шарика имеем $mv_0 = (M+m)u$, откуда $u = \dfrac{mv_0}{M+m}$. В точках максимального смещения от нового положения равновесия скорость бруска и шарика равна нулю. Из закона сохранения механической энергии следует равенство $\dfrac{(M+m)u^2}{2} + \dfrac{kx_0^2}{2} = (M+m)gx + \dfrac{k(x-x_0)^2}{2}$. Подставляя в это равенство найденные ранее x_0 и u, получаем квадратное уравнение относительно x, а именно $x^2 + \dfrac{2mg}{k}x - \dfrac{m^2 v_0^2}{k(M+m)} = 0$. Разрешая это уравнение, получаем два корня, которые соответствуют координатам верхней и нижней точек движения бруска с шариком: $x_{1,2} = -\dfrac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2 + \dfrac{m^2 v_0^2}{k(M+m)}}$.

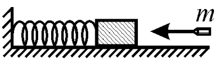


Амплитуда колебаний равна $A = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2) = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1 + \dfrac{k}{M+m}\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2} \approx 1{,}3$ см.

Ответ. $A = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1 + \dfrac{k}{M+m}\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2} \approx 1{,}3$ см.

Задача

На гладком горизонтальном столе лежит деревянный брусок, прикрепленный пружиной к вертикальной стенке. В брусок попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально вдоль оси пружины, и застревает в нем. Определить жесткость пружины



k, если известно, что время, в течение которого сжималась пружина после попадания пули в брусок, $T = 0{,}1$ с, отношение количества теплоты, выделившейся при взаимодействии пули с бруском, к начальной кинетической энергии пули $\alpha = 0{,}9$. Трением бруска о стол, а также массой пружины пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь законами сохранения импульса и изменения механической энергии.

Указание. Используйте формулу для периода колебаний пружинного маятника.

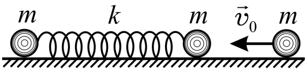
Решение. Обозначим через v скорость пули перед ударом, а через M – массу бруска. Из закона сохранения импульса и закона изменения механической энергии следуют равенства $mv = (M+m)u$, $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{(M+m)u^2}{2} + Q$, где u – скорость пули и бруска после соударения, Q – количество теплоты, выделившейся при взаимодействии пули с бруском, причем по условию $Q = \alpha\dfrac{mv^2}{2}$. Время T, в течение которого сжималась пружина, равно четверти периода колебаний тела массой $(M+m)$ на пружине жесткостью k, т.е. $T = \dfrac{2\pi}{4}\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$. Объединяя записанные выражения, получаем

$$k = \frac{\pi^2 m}{4T^2(1-\alpha)} = 25 \text{ Н/м.}$$

Ответ. $k = \dfrac{\pi^2 m}{4T^2(1-\alpha)} = 25$ Н/м.

Задача

Два одинаковых шарика массой m каждый, связанные пружиной жесткостью k и длиной l, лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий такой же шарик движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры шариков, связанных пружиной, и совершает упругое соударение с одним из них. Определить максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. Принять, что $v_0 < l\sqrt{2k/m}$. Массой пружины, временем соударения и трением пренебречь.



Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Найдите скорости шариков после удара.

Указание 2. Воспользуйтесь связью между скоростями шариков в моменты времени, когда расстояние между ними максимально или минимально.

Решение. Из законов сохранения импульса и энергии, записанных для упругого соударения одинаковых по массе шариков, следует, что они при ударе обмениваются скоростями. Поэтому после соударения двигавшийся шарик остановится, а покоившийся приобретет скорость v_0. При последующем движении шариков, связанных пружиной, также будут сохраняться импульс и энергия. Учитывая, что в моменты времени, когда расстояния между шариками максимальны или минимальны, их относительная скорость обращается в нуль, для этих моментов времени имеем $mv_0 = 2mv$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, где v – скорость шариков, x – удлинение пружины. Исключая из этих соотношений v, находим $x = \pm v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$. Следовательно, $l_{\max} = l + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $l_{\min} = l - v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Ответ. $l_{\max} = l + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $l_{\min} = l - v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$.