Законы сохранения в механике

Закон сохранения импульса и закон сохранения энергии – это теоремы механики Ньютона, которые используются для вычисления скоростей тел при их взаимодействии тогда, когда ускорение тела меняется во времени. Например, при спрыгивании человека с лодки он давит на лодку (и она на него) со все более ослабевающей силой; и лодка, и человек движутся с переменным ускорением. И напрямую применить второй закон Ньютона крайне сложно. То же самое можно сказать, когда санки катятся не с плоской горы, а выпуклой или вогнутой. Решение задач про движение тела по наклонной плоскости показывает, что смена наклона приведет к изменению действующих сил нормальной реакции и силы трения. Это означает, что постоянно меняется во времени равнодействующая всех сил (и по модулю, и по направлению), ускорение тела, что не позволяет вычислить скорость санок в конце горки, даже если пренебречь силой трения. В ряде случаев задача может быть решена и с помощью законов Ньютона и с помощью законов сохранения, но решение с использованием законов сохранения оказывается более простым.

Итак, раз законы сохранения – теоремы, доказываемые с помощью законов Ньютона, значит, они выполняются только в инерциальных системах отсчета. В большинстве задач это будет система отсчета, связанная с поверхностью земли. Кроме того, для их выполнения требуется выполнение еще ряда условий. Однако, прежде чем их сформулировать, надо, естественно, вспомнить ряд понятий.

Закон сохранения импульса

Чтобы говорить о законе сохранения импульса, надо понимать, что такое импульс тела, что такое импульс системы тел и что такое внешние силы, действующие на систему тел.

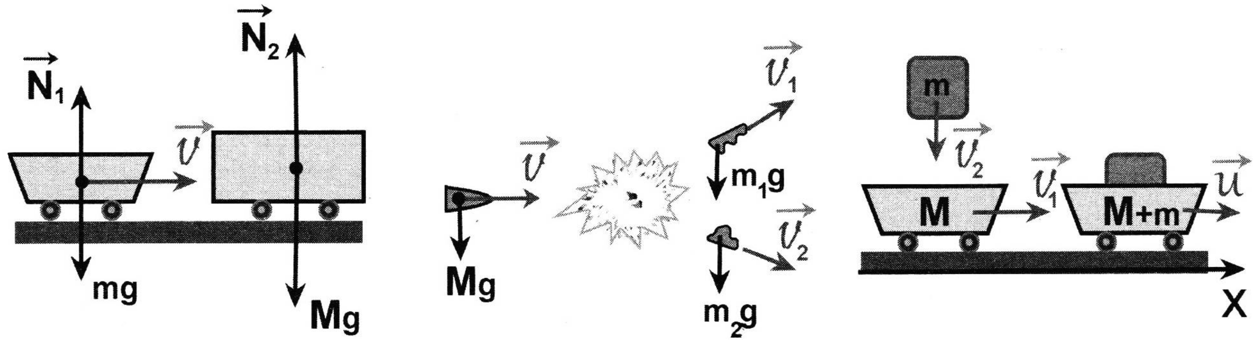
Импульс тела (материальной точки) $\vec{p} = m\vec{v}$ – векторная физическая величина, равная произведению массы этого тела (материальной точки) на его скорость. *Импульсом системы тел* называется сумма векторов импульсов всех тел этой системы. Силы, действующие между телами системы, называются *внутренними*. Силы, характеризующие воздействие на тела системы тел, не входящих в систему, называются *внешними*.

На основе второго и третьего законов Ньютона может быть доказан *закон сохранения импульса системы тел*: в инерциальной системе отсчета импульс системы тел остается неизменным, если на систему не действуют внешние силы или их векторная сумма равна нулю.

Приближенно он выполняется и для систем, когда внешние силы конечны, а процессы, происходящие в системе, являются быстрыми и вызваны большими внутренними силами (столкновение тел, взрывы, выстрелы и т.п.). Кроме того, если сумма внешних сил не равна нулю, но проекция суммы внешних сил на выбранную ось равна нулю, то сохраняется проекция импульса системы на эту ось.

На рисунке приведены примеры реальных процессов, в которых закон сохранения импульса системы тел выполняется точно (рис. 10а), приближенно (рис. 10б) и в проекции на выбранную ось (рис. 10в).

В случае а) внешними силами являются силы нормальной реакции, действующие на вагоны со стороны рельсов (трением о рельсы пренебрегают) и силы тяжести вагонов. Они попарно уравновешивают друг друга, значит сумма внешних сил равна нулю. Аналогично закон сохранения импульса можно применять в случаях, когда сталкиваются или разлетаются тела, находящиеся на гладком льду, на роликовых коньках или в лодках (считается, что сила трения лодки о воду также мала).



а) б) в)

Рис. 10

В случае б), где разрывается горизонтально летящий снаряд сумма внешних сил, действующих на куски снаряда, и до, и после разрыва, не равна нулю, так как силу тяжести в этом случае никто не уравновешивает. Однако, если расталкивание кусков снаряда происходит за малое время разрыва, то при конечной силе тяжести и большой скорости снаряда изменение импульса будет пренебрежимо мало по сравнению с исходным импульсом системы тел. Поэтому в таких случаях также применяют при решении задач закон сохранения импульса.

В случае в) закон сохранения импульса заведомо не выполняется. До падения камня на тележку его импульс был направлен вертикально, а импульс тележки горизонтально, значит, импульс системы двух тел был направлен вправо – вниз. После взаимодействия и камень, и тележка движутся горизонтально, поэтому импульс системы тел направлен также горизонтально. Поэтому векторы импульса системы тел до и после удара направлены в разных направлениях и не могут равняться друг другу. В этом случае доказывается теорема, согласно которой, если существует ось, проекция суммы внешних сил на которую равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось будет сохраняться. В данном случае такой осью является горизонтальная ось, так как все внешние силы действуют оп вертикали и не дают проекций на эту ось. Значит, сумма проекций импульса камня и тележки будет одинакова и до, и после падения камня. Аналогичная ситуация в задачах, когда пушка стреляет под углом к горизонту, находясь на железнодорожной платформе, человек стреляет из ружья под углом к горизонту, находясь на лодке, или отбрасывает комок снега под углом, стоя на коньках на льду.

Следует иметь в виду, что импульс тела – векторная физическая величина и его сохранение в случае равенства нулю суммы внешних сил означает выполнение векторного равенства. Например, при взаимодействии двух тел, движущихся в одной плоскости, это означает выполнение двух скалярных уравнений для проекций импульсов одновременно. Примером может служить нецентральный удар бильярдных шаров:

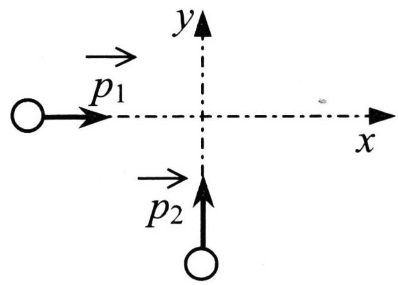
$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x},$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}.$$

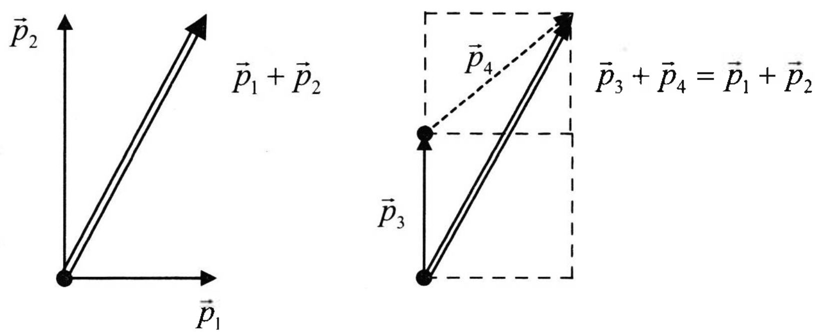
В дальнейшем для краткости будем использовать аббревиатуру ЗСИ вместо выражения «закон сохранения импульса».

Рассмотрим сначала несколько расчетных задач, которые иллюстрируют ситуации, когда закон сохранения импульса выполняется либо в векторном виде, либо в проекции на одну ось.

Пример 1.25. По гладкой горизонтальной плоскости по осям x и y движутся две шайбы с импульсами, равными по модулю p_1 = 2 кг·м/с и p_2 = 3,5 кг·м/с, как показано на рисунке. После соударения вторая шайба продолжает двигаться по оси y в прежнем направлении с импульсом, равным по модулю p_3 = 2 кг·м/с. Найдите модуль импульса первой шайбы после удара.

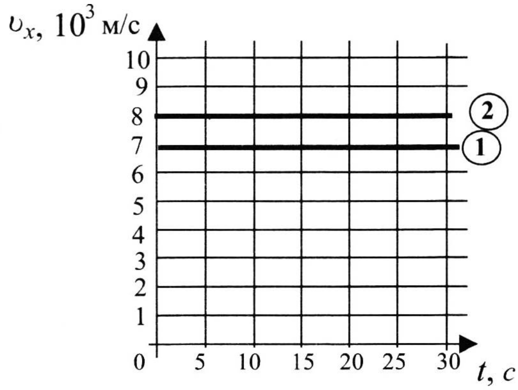


Решение. В данном случае внешние силы действуют в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, и импульс системы тел направлен под углом к осям x и y и сохраняется в ходе удара. Если нарисовать импульсы тел до и после удара, то станет ясно, как рассчитать искомый импульс p_4.

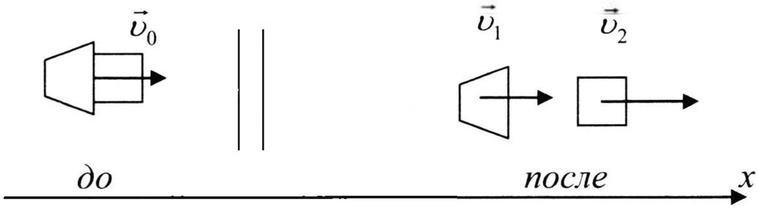


Можно воспользоваться тригонометрическими соотношениями и теоремой косинусов, а можно расчетом проекций искомого вектора. Как ясно из чертежа, $p_{4x} = p_1 = 2$ кг·м/с, а $p_{4y} = p_2 - p_3 = 1{,}5$ кг·м/с. Откуда по теореме Пифагора $p_4 = \sqrt{{p_{4x}}^2 + {p_{4y}}^2} = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5$ (кг·м/с).

Пример 1.26. На экране монитора в Центре управления полетов отображены графики скоростей двух космических аппаратов после их расстыковки (см. рис.). Масса первого из них равна 10 т, масса второго равна 15 т. С какой скоростью двигались аппараты перед их расстыковкой?



Решение. Сделаем чертеж, внимательно изучая график. На графике приведены проекции скоростей аппаратов на ось x, и раз они имеют одинаковый знак, значит оба аппарата движутся в одном направлении. Значит, импульс системы двух тел после расстыковки направлен вдоль оси x, значит, он направлен туда же и до расстыковки, если импульс сохраняется. Конечно, в данном случае сумма сил, действующих на тела не равна нулю, но, видимо, расстыковка происходит почти мгновенно путем расталкивания аппаратов пружиной или после срабатывания небольшого взрывного устройства между ними. Поэтому будем считать, что ЗСИ выполняется, и сделаем чертеж.



Тогда в векторном виде ЗСИ запишется так:

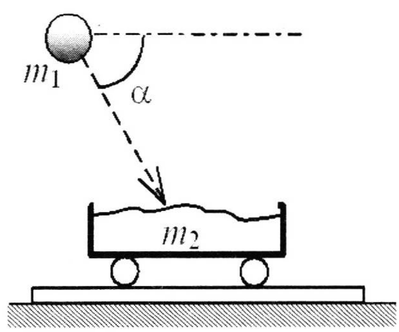
$(m_1+m_2)\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$.

А в проекциях на ось x: $(m_1+m_2)v_{0x} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}$, откуда

$$v_{0x} = \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x}}{(m_1+m_2)} = \frac{10000\cdot 7\cdot 10^3 + 15000\cdot 8\cdot 10^3}{25000} = 7{,}6\cdot 10^3 (м/с).$$

Когда на движущуюся тележку падает сверху груз и далее едет вместе с тележкой, импульс системы явно «не сохраняется». В этом случае вектор импульса системы двух тел, равный векторной сумме их импульсов, до удара направлен под углом к горизонту, а после удара вдоль горизонта, то есть явно изменился по направлению. В этом случае следует вспомнить теорему о сохранении проекции импульса системы тел на ось, вдоль которой внешние силы не действуют, то есть сумма проекций внешних сил на которую равна нулю.

Пример 1.27. Камень массой m_1 = 4 кг падает под углом 60° к горизонту со скоростью 10 м/с в тележку с песком, покоящуюся на горизонтальных рельсах (см. рис.). Чему равен импульс тележки с песком и камнем после падения камня?



Решение. Внешние силы, действующие на камень (сила тяжести) и на тележку (сила тяжести и сила нормальной реакции рельсов), направлены по вертикали, то есть сумма проекций этих сил на горизонтальную ось равна нулю. Сумма импульсов системы двух тел на эту ось до удара равна проекции импульса камня $p_{1x} = m_1 v cos\alpha$, так как импульс тележки равен нулю. Значит проекция импульса на горизонтальную ось после удара также равна $p_{1x} = m_1 v cos\alpha = 4\cdot 10\cdot 0{,}5 = 20$ (кг·м/с). Так как импульс системы после удара направлен горизонтально, значит его модуль равнее проекции на горизонтальную ось.

К заданиям, где закон сохранения импульса выполняется приближенно, следует отнести и задания о реактивной тяге спутников, в ходе полета которых меняется масса ракеты за счет сгорания топлива, и, кроме того, сумма внешних сил явно не равна нулю, так как сила тяжести действует на ракету и на вылетающие продукты горения топлива постоянно. В этом случае важно, не стать жертвой «горя от ума», то есть применить простейшую модель явления, которая считается доступной школьникам. Задача имеет и более точное решение, однако решается в рамках вузовской программы общей физики. В рамках ЕГЭ такое решение не предполагается.

Пример 1.28. На космическом аппарате, находящемся вдали от Земли, начал работать реактивный двигатель. Из сопла ракеты ежесекундно выбрасывается 2 кг газа ($\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2$ кг/с) со скоростью $v = 500$ м/с. Исходная масса аппарата $M = 500$ кг. Какой будет скорость v_1 аппарата через $t = 6$ с после старта? Начальную скорость аппарата принять равной нулю. Изменением массы аппарата за время движения пренебречь.

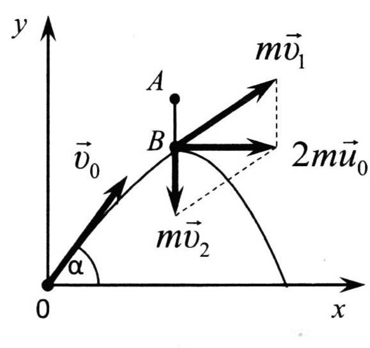
Решение. Так как в условии предлагается пренебречь изменением массы за время t после старта, то видимо, предполагается, что этот промежуток достаточно мал, чтобы массу ракеты считать постоянной (потери составят 12 кг на фоне 500 кг), с одной стороны, и изменение импульса системы «аппарат + вброшенный газ» за счет воздействия силы тяжести малым, что можно считать закон сохранения импульса для этой системы выполненным.
Тогда с учетом нулевого начального импульса системы тел и массы газа, выброшенной за время t: $\mathrm{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot t$ из ЗСИ, получим:

$$0 = Mv_1 - mv = Mv_1 - \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot tv.$$

Откуда $v_1 = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{vt}{M} = 12$ (м/с).

Во второй части вариантов КИМ ЕГЭ естественно встречаются задания, которые требуют применения закона сохранения импульса в сочетании с кинематикой и законами Ньютона.

Пример 1.29. Пластилиновый шарик, брошенный с горизонтальной поверхности Земли с начальной скоростью $\vec{v}$ под углом α к горизонту, абсолютно неупруго сталкивается в воздухе с другим таким же шариком, который начал двигаться без начальной скорости с некоторой высоты одновременно с первым шариком. Выразите время τ от начала движения шариков, через которое шарики упадут на Землю, если сразу после столкновения скорость шариков направлена горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. Первый шарик начинает движение из начала координат, а второй – из точки A. До и после столкновения (в точке B) шарики свободно падают (рис.).
Поэтому до столкновения для первого шарика

$y_1(t) = \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$,

$\upsilon_{1y}(t) = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$,

а для второго шарика $\upsilon_{2y}(t) = -gt$.

Шарики сталкиваются в момент t_1, при этом импульс системы двух шариков сохраняется: $m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = 2m\vec{u}_0$, а скорость $\vec{u}_0$ шариков после удара согласно условию горизонтальна. Поэтому $\upsilon_{1y}(t_1) + \upsilon_{2y}(t_1) = 0$, или $(\upsilon_0 \sin\alpha - gt_1) + (-gt_1) = 0$, откуда $t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{2g}$.

Столкновение шариков происходит на высоте

$h = y_1(t_1) = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{8g} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{g}$.

Поскольку скорость $\vec{u}_0$ шариков после удара горизонтальна, интервал времени t_2 от столкновения шариков до их падения на землю находится из условия $h = \frac{gt_2^2}{2}$, откуда $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{2g}$.

Шарики упадут на Землю в момент $\tau = t_1 + t_2 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{2g} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)$.

Закон сохранения энергии

Обратимся теперь ко второй теореме механики Ньютона – *закону сохранения механической энергии*. Для доказательства этой теоремы вводят понятия *работа силы* и *кинетическая энергия тела*. *Работа A* постоянной силы $\vec{F}$ – это скалярная физическая величина, равная произведению модуля силы F, модуля перемещения s и косинуса угла между направлениями силы и перемещения (рис. 11).

$A = Fs \cos \alpha$,

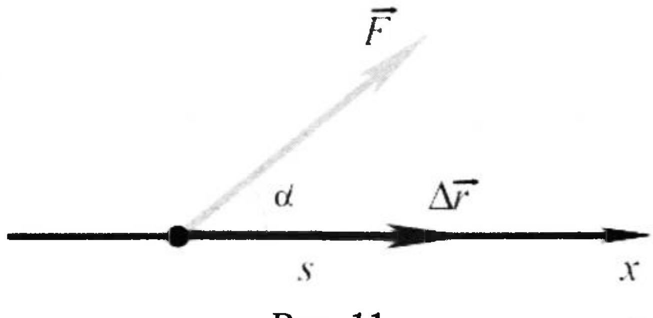


Рис. 11

Единица измерения работы – джоуль (1 Дж = 1 Н·1м). *Кинетическая энергия* материальной точки – скалярная физическая величина, характеризующая движущееся тело и равная половине произведения ее массы на квадрат ее скорости:

$$E_x = \frac{mv^2}{2}.$$

Единица кинетической энергии в СИ также джоуль (Дж).

Рассчитаем кинетическую энергию, которую приобретет материальная точка под действием постоянной силы F, действующей вдоль направления ее перемещения (α=0°). Если в этом случае под действием силы материальная точка переместилась на расстояние s, то работа силы равна $A = Fs$.

Используя кинематические соотношения между скоростью, ускорением, пройденным путем, а также второй закон Ньютона, связывающий ускорение и силу, действующую на материальную точку массой m, можно показать, что

$$A = Fs = mas = ma \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{mv_2^2 - mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Таким образом, работа постоянной силы равна изменению кинетической энергии тела. Этот вывод обобщается и на меняющуюся во времени силу, и на одновременное действие на материальную точку нескольких сил и носит название теоремы об изменении механической энергии: *изменение кинетической энергии материальной точки равно работе всех сил, действующих на нее при переходе из точки 1 в точку 2 траектории.*

Работа силы может быть как положительной, так и отрицательной, так и равной нулю. Это зависит от угла между направлениями перемещения и силы, которая, совершает работу. Поэтому, например, работа силы трения всегда отрицательна (α = 180°, cos 180° = −1), а работа силы нормальной реакции $\vec{N}$ равна нулю (α = 90°, cos 90° = 0). И изменение кинетической энергии поэтому под действием силы трения отрицательно (тело замедляется), если работа всех остальных сил равна нулю. А изменения кинетической энергии на гладкой горизонтальной плоскости под действием силы нормальной реакции не происходит, если работа всех остальных сил (включая силу трения и силу тяжести) равна нулю.

Работа некоторых сил не зависит от траектории движения тела и может быть вычислена заранее. На основании этого с использованием теоремы об изменении кинетической доказывается теорема о сохранении механической энергии. Так, например, можно доказать, что работа постоянной вблизи поверхности Земли силы тяжести не зависит от траектории движении тела и определяется только высотой h относительно некоторого уровня над Землей. $A_{mg} = mgh = mg(h_2 - h_1)$, если тело было на высоте h_2 и спустилось до высоты h_1 (относительно выбранного уровня), причем независимо от того, летело оно вертикально вниз или сначала поднималось, потом опускалось, или вовсе летело по дуге параболы. Это позволяет доказать, что:

Если тело, двигаясь только под действием силы тяжести из точки 1 в точку 2, которые находятся на высоте h_1 и h_2 (относительно выбранного уровня), то величина, равная $E_{мех} = mgh + \frac{mv^2}{2}$ и называемая механической энергией тела, сохраняется, то есть в ходе движения, независимо от траектории,

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Это и есть формулировка закона сохранения механической энергии в простейшем варианте. Эта величина сохраняется еще в ряде случаев, часто встречающихся в задачах: когда тело колеблется на нити и когда тело съезжает с гладкой (без трения) произвольной формы горки (рис. 12). Сохранение механической энергии в этих случаях доказывается также на основании теоремы об изменении кинетической энергии, так как работа всех сил, кроме работы силы тяжести, в этих системах равна нулю. Действительно, для шарика на нити работа силы натяжения $\vec{T}$ равна нулю, так как она направлена все время перпендикулярно перемещению шарика. Для гладкой горки работа силы нормальной реакции равна нулю по той же причине. Поэтому в запись теоремы об изменении кинетической энергии в этих системах войдет только работа силы тяжести, как и в случае движения тела, брошенного под углом к горизонту.

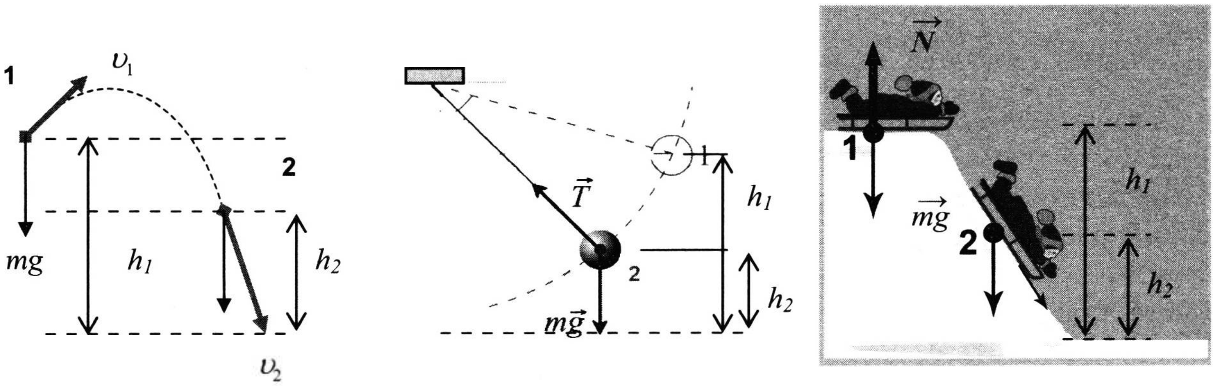
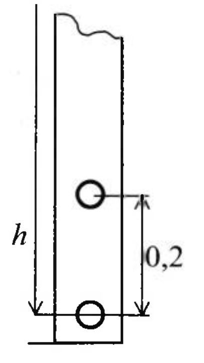


Рис. 12

Величина $E_n = mgh$, входящая слагаемым в механическую энергию тела, называется *потенциальной энергией* тела, поднятого над землей на высоту h (относительно произвольно выбранного начального уровня). Такая энергия вводится для сил, работа которых не зависит от траектории движения тела.

Использование этих соотношений проверяется во многих заданиях с выбором ответа. Рассмотрим только один пример.



Пример 1.30. На рисунке показаны положения свободно падающего шарика через интервалы времени равные $\dfrac{1}{30}$ с. Масса шарика 0,1 кг. Оцените, пользуясь законом сохранения энергии, высоту, с которой упал шарик.

Решение. Если использовать простейшую модель эксперимента, полагая, что приведенные на рисунке 0,2 м он пролетел за $t = \dfrac{1}{30}c$ и его средняя скорость на этом промежутке примерно равна мгновенной скорости в конце полета $v_2 \approx \dfrac{0{,}2\cdot 30}{1}\dfrac{м}{c} = 6\dfrac{м}{c}$, то, применяя закон сохранения механической энергии для полета с высоты h, получим $mgh + 0 = 0 + \dfrac{mv_2^2}{2}$. Откуда $h = \dfrac{v_2^2}{2g} \approx \dfrac{36}{2\cdot 9{,}8} \approx 1{,}84$ (м). В модели равноускоренного движения можно найти конечную мгновенную скорость на участке, показанном на рисунке. Записав закон сохранения энергии для двух нарисованных положений шарика, получим

$$mg\Delta h + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Добавив к этому выражению связь между скоростями при движении в течении времени $t = \frac{1}{30}$ с с ускорением g, получим $v_2 = v_1 + gt$.

Сократив первое уравнение на g и решив систему двух уравнений с двумя неизвестными v_1 и v_2, получим (полагая g=9,8 м/с^2) $v_1 = 5{,}98$ м/с и $v_2 = 6{,}31$ м/с. Как и следовало ожидать, одна скорость чуть меньше средней, вторая – чуть больше средней скорости 6 м/с. Использование точного значения скорости v_2 в законе сохранения энергии $mgh = \frac{mv_2^2}{2}$ дает значение высоты $h \approx 2{,}0$ м.

Еще одной системой, в которой на основании теоремы об изменении кинетической энергии и понятия работа силы можно ввести понятие потенциальной энергии и сформулировать закон сохранения энергии, является груз на пружине, подчиняющейся закону Гука. Если в случае движения тела под действием силы тяжести рассчитывается работа постоянной по модулю и направлению силы, то в случае груза на пружине понятие потенциальной энергии в ходе колебания груза вводится на основании расчета работы непрерывно меняющейся силы. В ходе колебания груза постоянно меняется координата конца пружины, на которой колеблется груз, а значит, постоянно меняется модуль силы упругости (рис. 13). Как видно из рисунка, после прохождения положения равновесия (когда пружина не сжата и растянута, *x=0*) меняется и направление силы. В ходе такого движения горизонтального маятника силы тяжести груза и реакции опоры уравновешены, движение происходит перпендикулярно этим силам, поэтому и ускорение груза, и изменение его кинетической энергии происходит под действием только силы упругости пружины.

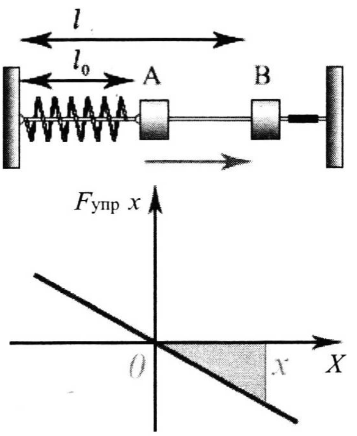


Рис. 13

Рассчитаем *работу силы упругости пружины* при движении груза вправо от точки А до точки В (рис. 13). Согласно закону Гука, $F_{\text{упр } x} = -kx$.

Работу переменной силы упругости при движении тела лучше всего можно посчитать графически (это площадь заштрихованного треугольника рис. 13):

$$A = -\frac{kx^2}{2},$$

где $x = (l - l_0)$ – растяжение пружины.

Применяя для тела на пружине теорему об изменении кинетической энергии, получим:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_{AB} = -\frac{kx_B^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{mv_B^2}{2} + \frac{kx_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2}.$$

Величину $\frac{kx_B^2}{2}$ называют *потенциальной энергией груза на пружине* или *потенциальной энергией пружины*, так как она связана с работой силы упругости.

Выражение

$$\frac{mv_B^2}{2} + \frac{kx_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{kx_A^2}{2}$$

рассматривают как закон сохранения полной механической энергии груза на пружине, где $x_A = 0$, т.е. смещение пружины равно нулю.

Аналогично можно показать, что это соотношение выполняется не только при растягивании пружины, но и при ее сжатии, то есть при движении влево от положения равновесия.

При заданной полной механической энергии груза на пружине кинетическая энергия груза, а следовательно, и его скорость, будет максимальна тогда, когда потенциальная энергия минимальна ($x = 0$), и минимальна ($v = 0$) тогда, когда потенциальная энергия максимальна (максимально растяжение пружины).

Закон сохранения полной механической энергии трактуют как изменение кинетической энергии на столько, на сколько меняется потенциальная энергия.

Особенно сложен анализ преобразования различных видов механической энергии друг в друга, когда груз подвешен к вертикальной пружине (вертикальный пружинный маятник), поскольку работу совершает не только сила упругости, но и сила тяжести. Поэтому при рассмотрении перемещения груза из точки A в точку B траектории придется учитывать обе работы. В этом случае используя теорему об изменении кинетической энергии легко показать, что будет сохраняться полная механическая энергия, включающая в точке A кинетическую энергию груза $\frac{mv_A^2}{2}$, его потенциальную энергию как тела поднятого на высоту h относительно некоторого выбранного уровня mgh_A и потенциальную энергию пружины $\frac{kx_A^2}{2}$, где x_A– полное растяжение пружины в точке A (рис. 14).

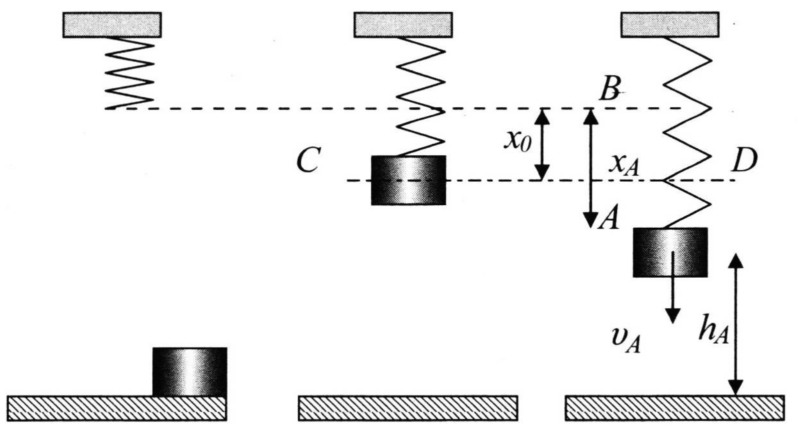


Рис. 14

То есть $\frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{kx^2}{2} = E_{мех} = const$, если x отсчитывать от положения нерастянутой пружины.

Рассмотрим, например, для вертикального маятника задачу о том, как ведут себя потенциальная энергия пружины, кинетическая энергия груза, его потенциальная энергия в поле тяжести, когда груз движется вверх к положению равновесия.

На рис. 15 показан уровень CD равновесия покоящегося груза, вокруг которого он колеблется. Если точка A – самая нижняя точка траектории, то пружина в ней максимально растянута, значит потенциальная энергия пружины в этой точке максимальна и при движении к точке равновесия ($y = 0$) она может только уменьшаться. Потенциальная энергия груза в поле тяжести увеличивается, так как груз поднимается все выше относительно земли. Сложнее обстоит с анализом изменения кинетической энергии. Для этого следует доказать, что в точке равновесия кинетическая энергия максимальна. Проще всего показать это, используя второй закон Ньютона, а не закон сохранения энергии. Точка равновесия определяется условием

$$kx_0 = mg$$

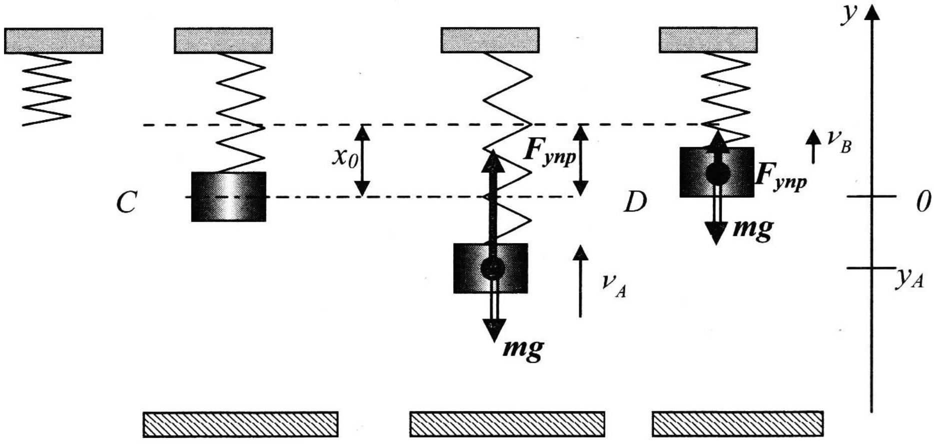


Рис. 15

В точках ниже этой точки пружина растянута сильнее, и сила упругости становится больше mg, то есть равнодействующая двух сил в точках ниже положения равновесия направлена вверх. Поэтому, начиная с нижней точки траектории, где скорость груза равна нулю, груз будет ускоряться вплоть до положения равновесия, поскольку скорость и равнодействующая всех сил и ускорение направлены в одну сторону. Ускорение будет убывать и в точке равновесия станет равным нулю.

Как только груз поднимется выше положения равновесия, сила упругости станет меньше mg, равнодействующая этих двух сил будет направлена вниз (то есть против скорости груза) и груз начнет замедляться, хотя будет еще продолжать двигаться вверх. Пока окончательно не остановится в верхней точке траектории. Поэтому в точке равновесия, скорость груза, а следовательно, и его кинетическая энергия достигнут максимума. Значит, при движении груза снизу вверх к точке равновесия его кинетическая энергия возрастает.

Если при движении тела возникают внутренние или внешние силы трения, то работа силы трения приводит к уменьшению механической энергии. Работа силы трения эквивалентна переводу механической энергии во внутреннюю, то есть при трении тел друг о друга увеличивается суммарная кинетическая энергия движения молекул тел относительно их центра. Попросту говоря, трущиеся тела нагреваются, поэтому иногда в задачах «уменьшение механической энергии за счет внешнего или внутреннего трения» называют «выделением количества теплоты» или просто «выделившейся теплотой», что и вовсе является некорректным жаргонным выражением. Поскольку работа силы трения достаточно просто вычисляется $A_{F_{тр}} = F_{тр} s \cos 180° = -F_{тр} s$, а уменьшение механической энергии в точности равно по модулю работе силы трения, то это упрощает решения ряда задач.

Рассмотрим пару примеров.

Пример 1.31. Из пружинного пистолета выстрелили вертикально вниз в мишень, находящуюся на расстоянии 2 м от него. Совершив работу 0,12 Дж, пуля застряла в мишени. Какова масса пули, если пружина была сжата перед выстрелом на 2 см, а ее жесткость 100 Н/м?

Решение. В данной задаче пренебрежем изменением длины пружины в ходе выстрела по сравнению с высотой, на которую переместилась пуля до удара о мишень. Будем считать, что вначале пуля в пистолете покоилась, а пружина была сжата, поэтому энергия системы «пружина+пуля» равнялась потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии пули, расположенной на высоте h относительно уровня мишени. Перед ударом о мишень полная механическая энергия этой системы состоит только из кинетической энергии пули. Согласно закону сохранения механической энергии, имеем :

$$\frac{kx^2}{2}+mgh=\frac{mv_1^2}{2}, \qquad (1)$$

где v_1– скорость пули непосредственно перед мишенью.
Пуля при вхождении потеряла кинетическую энергию за счет работы силы трения, поэтому, согласно теореме об изменении кинетической энергии, изменение этой энергии равно работе силы трения. Модуль этой работы «зашифрован» в условии задачи как «работа пули», хотя в физике все-таки чаще говорят о работе силы, а не работе объекта:

$$0-\frac{mv_1^2}{2}=A_{F_{тр}}<0 \text{ или}$$

$$\frac{mv_1^2}{2}=-A_{F_{тр}}=A. \qquad (2)$$

Решая полученную систему уравнений, находим массу пули:

$$m=\frac{2A-kx^2}{2gh}=5 \text{ (г)}.$$

Пример 1.32. Лыжник массой 60 кг спустился с горы высотой 20 м. Какой была сила сопротивления его движению по горизонтальной лыжне после спуска, если он остановился, проехав 200 м? Считать, что по склону горы он скользил без трения.

Решение. Закон сохранения энергии для спуска с гладкой горы даст

$$mgh=\frac{mv^2}{2}, \qquad (1)$$

где v – скорость лыжника сразу после спуска горы.

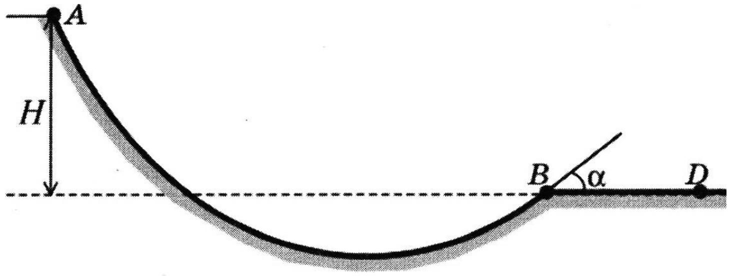
Изменение механической энергии на горизонтальном участке равно работе силы сопротивления, направленной против перемещения лыжника на расстояние s:

$$0-\frac{mv^2}{2}=A_{F_{сопр}}=-F_{сопр}s\,. \qquad (2)$$

Решая полученную систему уравнений, получим $mgh=F_{сопр}s$, откуда

$$F_{сопр}=\frac{mgh}{s}=60(H)\,.$$

Пример 1.33. Шайба массой $m = 0{,}1$ кг начинает движение по желобу AB из точки A из состояния покоя. Точка A расположена выше точки В на высоте $H = 6$ м. В процессе движения по желобу механическая энергия шайбы из-за трения уменьшается на $\Delta E = 2$Дж. В точке B шайба вылетает из желоба под углом, соответствующим максимальной дальности полета BD. Найдите максимальную высоту подъема шайбы после вылета шайбы из желоба. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Потенциальная энергия шайбы в точке A относительно уровня BD равна mgH. За счет трения перед вылетом из желоба шайба имеет полную механическую энергию $mgH - \Delta E$, которая в точке B является кинетической энергией тела $\dfrac{m\vartheta_0^2}{2}$. В ходе полета после вылета из желоба эта энергия преобразуется в потенциальную энергию, частично в кинетическую. Закон сохранения полной механической энергии при перемещении шайбы из точки В в точку максимального подъема дает $mgH - \Delta E = \dfrac{m\vartheta_0^2}{2} = mgh + \dfrac{m\vartheta^2}{2}$.

Рассмотрение полета тела, брошенного под углом к горизонту, показывает, что максимальная дальность полета при заданной начальной скорости υ_0 достигается при броске под углом $\alpha = 45^\circ$. Действительно, время полета $t_{\text{пол}} = \dfrac{2\vartheta_0 \sin\alpha}{g}$, скорость движения вдоль горизонтальной оси $\upsilon_x = \upsilon_0\cos\alpha$, откуда дальность полета $L = \dfrac{2\vartheta_0 \sin\alpha \cdot \vartheta_0 \cos\alpha}{g} = \dfrac{\vartheta_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Значение L принимает максимальное значение при $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $\alpha = 45^\circ$. Поскольку в верхней точке траектории тело движется со скоростью $\vartheta = \vartheta_x = \vartheta_0 \cos 45 = \dfrac{\vartheta_0}{\sqrt{2}}$, то закон сохранения энергии дает

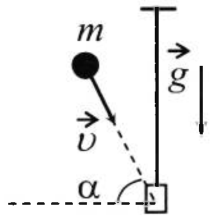
$$\frac{m\vartheta_0^2}{2} = mgh + \frac{m\vartheta^2}{2} = mgh + \frac{m\vartheta^2}{2\cdot 2} = mgh + \frac{m\vartheta_0^2}{4}.$$

Откуда $mgh = \dfrac{m\vartheta_0^2}{4} = \dfrac{mgh - \Delta E}{2}$ или $h = \dfrac{H}{2} - \dfrac{\Delta E}{2mg} = 2(\text{м})$.

Совместное применение закона сохранения импульса и энергии

Более сложны задания, в которых следует одновременно применить и закон сохранения импульса, и закон сохранения энергии. Прежде всего, следует понять, какой из этих законов можно применять на каком из этапов описанного механического процесса.

В заданиях, где требуется использовать закон сохранения импульса, часто используется термин *абсолютно неупругий удар*, который следует трактовать как то, что после удара тела «слипаются», движутся как единое целое. При этом, как нетрудно показать, сумма кинетических энергий тел до удара оказывается больше, чем после удара, механическая энергия переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел, они нагреваются. При слипании части тел деформируются, слои, двигаясь друг о друга, подвергаются внутреннему трению, а наличие силы трения всегда приводит к потере суммарной механической энергии. *Абсолютно упругий удар* – это удар, при котором сохраняется и сумма импульсов соударяющихся тел, и сумма их кинетических энергий – не происходит «потери» механической энергии.



Пример 1.34. Доска массой 0,5 кг шарнирно подвешена к потолку на легком стержне. На доску со скоростью 10 м/с налетает пластилиновый шарик массой 0,2 кг и прилипает к ней (см. рис.). Скорость шарика перед ударом направлена под углом 60° к нормали к доске. Чему равна кинетическая энергия системы тел после соударения?

Решение. Текст задачи, конечно, далек от реалий, но надо «понять автора». Судя по рисунку, доска своей длинной стороной расположена в плоскости, перпендикулярной чертежу. В противном случае было бы необходимо учитывать особенности измнения кинетической энергии для движения твердых тел, а не материальных точек. Удар, когда шарик прилипает к доске и они движутся с одинаковой скоростью, неупругий. Чтобы найти кинетическую энергию после удара, найдем скорость доски с шариком u после удара. Для этого нужно применить «закон сохранения» проекции импульса на горизонтальную ось. Импульс системы тел «шарик – доска» не сохраняется, так как до удара он направлен вправо вниз, а после удар точно вправо. Однако в данном случае горизонтальная ось – это ось, на которую внешние силы (сила тяжести доски, шарика, сила натяжения нити) дают проекцию, равную нулю, и значит, они не могут изменить проекцию импульса системы на эту ось, поэтому в проекциях на ось x, направленную горизонтально, $mv cos\alpha = (m+M)u$, так как скорость доски с шариком после удара направлена горизонтально (M – масса доски).

Откуда

$$u = \frac{mv\cos\alpha}{(m+M)},$$

а кинетическая энергия шарика и доски

$$E_к = \frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{m^2v^2\cos^2\alpha}{2(m+M)} \approx 0.71\,(Дж).$$

Так как удар неупругий, то часть кинетической энергии шара ($E_{к0} = \frac{mv^2}{2} = 10 Дж$) перешла во внутреннюю энергию шара и доски, которые нагрелись.

Пример 1.35. Брусок массой $m_1 = 600$ г, движущийся со скоростью 2 м/с, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 200$ г. Какой будет скорость первого бруска после столкновения? Удар считать центральным и абсолютно упругим.

Решение. Термин «центральный удар» означает, что тела столкнулись так, что до удара и после него их скорости направлены вдоль одной и той же линии. Термин «абсолютно упругий удар» означает, что деформации брусков при столкновении были упругими, то есть не было внутренних сил трения и кинетическая энергия системы тел до удара и после нее одинакова, поскольку потенциальная энергия тел при движении по горизонтальной плоскости не меняется. Впрочем, в условии не сказано, что тела расположены на горизонтальной поверхности, однако в задаче мы будем оперировать очень коротким промежутком времени до и после удара, поэтому даже если такое столкновение произошло в воздухе, то тела практически не сдвинулись по вертикали, поэтому их потенциальная энергия при столкновении не меняется, а сумма кинетических энергий сохраняется. Слово «удар» в условии позволяет нам использовать и закон сохранения импульса, поскольку даже если бруски сталкиваются в воздухе, силы тяжести их конечны, а время столкновения можно считать очень кратким.

Тогда, записав законы сохранения импульса (в векторном виде) и энергии (в виде сумм кинетических энергий до и после удара), получим:

$$m_1\vec{v}_1 + 0 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2',$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + 0 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}.$$

Переписав первое уравнение в проекции на ось, расположенную вдоль начальной скорости первого бруска и учитывая, что удар центральный, получим

$$m_1 v_1 = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}. \qquad (1)$$

Поскольку модули проекций скоростей совпадают с модулями скоростей ($|v_{1x}'| = v_1'$ и $|v_{2x}'| = v_2'$, то закон сохранения энергии можно переписать в виде

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_{1x}'^2 + m_2 v_{2x}'^2. \qquad (2)$$

Система уравнений (1) и (2) содержит два неизвестных в виде проекций скоростей брусков после удара. Для решения системы удобно перенести слагаемые, содержащие массу первого бруска, в левые части уравнений:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_{1x}') = m_2 v_{2x} \\ m_1(v_1^2 - v_{1x}'^2) = m_2 v_{2x}'^2 \end{cases}$$

Теперь, поделив второе уравнение на первое и разлагая разность квадратов на множители, получим

$$(v_1 + v_{1x}') = v_{2x}.$$

Остается подставить это выражение для v_{2x} в уравнение (1), чтобы выразить искомую величину:

$$v_{1x}' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} = 1 \text{ м/с}.$$

Дальнейшее усложнение заданий, в которых одновременно нужно применить и закон сохранения (изменения) механической энергии, и импульса идет по пути предварения удара процессом разгона одного из тел и анализом дальнейшего движения тел после удара. В этом случае закон сохранения импульса применяется для установления соотношения скоростей тел до и после удара, а определение скоростей в ходе последующего (или предваряющего удар) движения производится из законов сохранения энергии или ее изменения за счет работы силы трения.

Пример 1.36. От удара копра массой 450 кг, падающего свободно с высоты 5 м, свая массой 150 кг погружается в грунт на 10 см. Определите силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар – абсолютно неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи пренебречь.

Решение. Тексты некоторых физических задач, предлагаемых на ЕГЭ, содержат технические термины, которые современные ученики слышат впервые. Такие задачи в современные сборники, в том числе и варианты ЕГЭ, попадают по инерции из старых задачников, написанных во времена, когда эти слова были на слуху, были новыми техническими устройствами. В данном случае речь идет о словосочетании «копра, падающего свободно с высоты». Копёр – строительная машина, предназначенная для установки свай. Вместо выражения «копра массой 450 кг» в тексте следует читать «молот копра массой 450 кг», хотя в технике эта падающая на сваю часть копра называется «баба копра».

Для неупругого удара молота массой m_1, падающего на сваю массой m_2 со скоростью v_1 закон сохранения импульса в проекции на вертикальную ось (если удар происходит быстро и рассматривается скорость v_2 молота со сваей сразу после удара, то предположение о сохранении величины импульса системы тел вполне справедливо):

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

Закон сохранения механической энергии, примененный для падения молота с высоты h_1 до точки удара с верхним торцом сваи:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

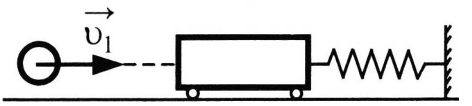
Теорема об изменении кинетической энергии молота со сваей в ходе остановки за счет действия сил сопротивления грунта F при погружении сваи в грунт на глубину h_2:

$$\frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} = -F_{mp} h_2.$$

Решение этой системы из трех уравнений дает ответ:

$$F = \frac{m_1{}^2 g h_1}{(m_1 + m_2) h_2} \approx 169 \text{ кН}.$$

Пример 1.37. Пластилиновый шар массой 0,1 кг имеет скорость 1 м/с. Он налетает на неподвижную тележку массой 0,1 кг, прикрепленную к пружине, и прилипает к тележке (см. рис.). Чему равна максимальная кинетическая энергия системы при ее дальнейших колебаниях? Трением пренебречь. Удар считать мгновенным.



Решение. Важно понять, что при решении задачи описанный процесс следует разбить на 2 этапа: очень быстрый неупругий удар, при котором сохраняется импульс системы «шар-тележка» (но не сохраняется механическая энергия), и движение (колебание) системы «шар-тележка», в ходе которого сохраняется механическая энергия системы (сумма кинетической энергии шара с тележкой и потенциальной энергии пружины).
После этого ясно, что закон сохранения импульса при неупругом ударе шара, летящего со скоростью υ_1 на покоящуюся тележку, дает возможность вычислить скорость υ_2 их совместного движения после удара

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_2 .$$

Учитывая, что первоначально пружина не была сжата или растянута, так как тележка покоилась, можно понять, что в ходе дальнейшего движения к стене кинетическая энергия будет только снижаться и максимальная кинетическая энергия в ходе колебаний – это кинетическая энергия шара с тележкой сразу после удара

$$E_к = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon_2^2}{2} .$$

Подстановка числовых данных дает скорость объектов после удара $\upsilon_2 = 0{,}5$ м/с и кинетическую энергию $E_к = 0{,}025$ Дж.

Пример 1.38. Брусок массой m_1 = 500 г соскальзывает по наклонной плоскости с высоты h = 0,8 м и, двигаясь по горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным бруском массой m_2 = 300 г. Считая столкновение абсолютно неупругим, определите общую кинетическую энергию брусков после столкновения. Трением при движении пренебречь. Считать, что наклонная плоскость плавно переходит в горизонтальную.

Решение. Кинетическая энергия первого бруска перед столкновением определяется из закона сохранения полной энергии при скольжении по гладкой наклонной плоскости:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = m_1 g h .$$

Скорость системы υ после удара, определяется из закона сохранения импульса на горизонтальном участке:

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon .$$

Кинетическая энергия брусков после столкновения

$$E = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} .$$

Из системы уравнений получим:

$$E=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot m_1gh=2{,}5\,(\text{Дж}).$$

Пример 1.39. Пуля летит горизонтально со скоростью $v_0 =$ 160 м/с, пробивает стоящую на горизонтальной шероховатой поверхности коробку и продолжает движение в прежнем направлении со скоростью $\frac{1}{4}v_0$. Масса коробки в 12 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и поверхностью μ = 0,3. На какое расстояние S переместится коробка к моменту, когда её скорость уменьшится на 20%?

Решение. Процесс следует разбить на два этапа: быстрое пробивание пулей коробки и торможение коробки с шершавую поверхность после получения ею скорости u_0 после вылета пули. Пусть m – масса пули, M – масса коробки. Согласно закону сохранения импульса

$$mv_0=m\frac{1}{4}v_0+Mu_0.$$

Так как $M = 12m$, то из этого уравнения следует, что $u_0=\frac{1}{16}v_0$.

По условию, конечная скорость коробки равна $u = 0{,}8u_0$.

Теорема об изменении кинетической энергии за счет работы силы трения, равной на горизонтальной поверхности $F_{тр}=\mu N=\mu mg$ и действовавшей на пути s, дает:

$$\frac{Mu^2}{2}-\frac{Mu_0^2}{2}=-\mu Mgs.$$

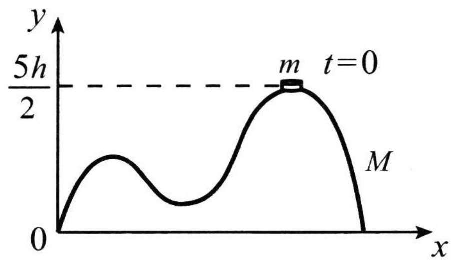
Сокращая на M и подставляя выражения для u и u_0, получим

$$s=\frac{0{,}36}{2}\cdot\frac{u_0^2}{\mu g}=\frac{0{,}36}{2}\cdot\left(\frac{v_0}{16}\right)^2\cdot\frac{1}{\mu g}=6\ (\text{м}).$$

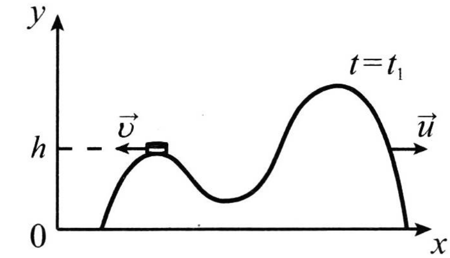
Пример 1.40. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых h и $\frac{5}{2}h$ (см. рис.). На правой вершине горки находится шайба. От незначительного толчка шайба и горка приходят в движение, причём шайба движется влево, не отрываясь от гладкой поверхности горки, а поступательно движущаяся горка не отрывается от стола. Скорость шайбы на левой вершине горки оказалась равной υ. Найдите отношение масс шайбы и горки.

Решение. Ясно, что в ходе движения двух тел системы происходит изменение импульса и энергии каждого из тел. Потенциальная энергия шайбы уменьшается, а ее кинетическая энергия и кинетическая энергия горки увеличиваются. Так как второй закон Ньютона при анализе движения и шайбы и горки неприменим (действие силы давления шайбы на горку все время меняет и направление и модуль, то же можно сказать и про силу реакции горки, толкающей шайбу), требуется проанализировать возможность применения законов сохранения.

На систему тел «шайба + горка» действуют внешние силы (тяжести и реакции стола), направленные по вертикали, поэтому проекция импульса системы на горизонтальную ось Ox системы отсчёта, связанной со столом, сохраняется.



Работа сил реакции равна нулю, так как поверхности и горки, и стола гладкие, поэтому полная механическая энергия системы тел также сохраняется.



Следует нарисовать два положения системы, для которых будут записываться законы сохранения. В условии задачи фигурируют два положения (см. рис.), когда шайба на вершине правой горки ($t=0$) и когда она на вершине левой ($t=t_1$).

Сохранения проекции импульса на ось x для перехода из первого состояния во второе дает: $0 = Mu - mv$.

Так как потенциальная энергия горки не меняется, закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + mgh = \frac{5}{2}mgh .$$

Решая систему двух уравнений, получим искомое отношение масс шайбы m и горки M:

$$\frac{m}{M} = \frac{3gh}{v^2} - 1.$$

Пример 1.41. Снаряд, движущийся со скоростью v_0, разрывается на две равные части, одна из которых продолжает движение по направлению движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличивается за счёт энергии взрыва на величину ΔE. Скорость осколка, движущегося вперёд по направлению движения снаряда, равна v_1. Найдите массу m осколка.

Решение. При разрыве сохраняется импульс системы, так как внешние силы конечны, а разрыв происходит быстро. Записывая закон сохранения импульса в проекции на ось, направленную вдоль начальной скорости снаряда, и добавляя закон сохранения энергии с учетом вклада в нее энергии сгоревшего порохового заряда, получим:

$$\begin{cases} 2mv_0 = mv_1 - mv_2; \\ mv_0^2 + \Delta E = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{mv_2^2}{2}. \end{cases}$$

Здесь v_2 – модуль скорости летящего назад осколка снаряда.

Выражая его из первого уравнения и подставляя во второе (предварительно разделив его на m) получаем: $v_2 = v_1 - 2v_0$.

$$(v_1^2 - 2v_0v_1 + v_0^2) - \frac{\Delta E}{m} = 0.$$

Откуда с учетом, что выражение в скобках – это квадрат разности двух величин, получим:

$$m = \frac{\Delta E}{(v_1 - v_0)^2}.$$

Пример 1.42. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 200 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда. До какой максимальной высоты поднялся второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. В данном случае закон сохранения импульса нужен только для того, чтобы утверждать, что осколки разлетелись с одинаковыми скоростями:

$$0 = mv_1 - mv_2 \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Далее задача решается с использованием только закона сохранения энергии.

Согласно закону сохранения энергии, для движения снаряда с земли до точки разрыва

$$2mgh = \frac{2m{v_0}^2}{2}.$$

Так как второй осколок на данной высоте имел скорость v_2, то закон сохранения энергии для его перемещения из этой точки в точку максимального подъема дает:

$$mgh + \frac{m{v_2}^2}{2} = mgh_{\text{макс}}.$$

Для первого осколка, который упал на землю со скоростью v_0, стартовав на высоте h со скоростью $v_1 = v_2$:

$$mgh + \frac{m{v_2}^2}{2} = \frac{m(2v_0)^2}{2}.$$

Решая систему из 3-х уравнений, получим

$$h_{\text{макс}} = h + \frac{{v_2}^2}{2g} = \frac{4{v_0}^2}{2g} = \frac{2{v_0}^2}{g} = 8000 \text{ м}.$$

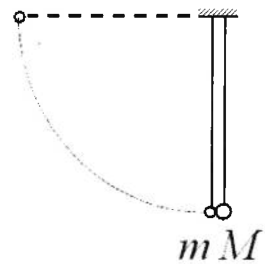
В заданиях о соударении двух шаров, подвешенных на нитях, или о подвешенном на нити шаре, в который попадает пуля, следует четко представлять, на каких этапах рассматриваемого движения следует применять закон сохранения импульса, а на каком – закон сохранения энергии.

Если речь идет об упругом ударе шаров, то закон сохранения энергии выполняется и на стадии спуска шара, и на стадии соударения, и на стадии подъема разлетевшихся шаров. Закон сохранения импульса применяется на стадии рассмотрения удара в нижней точке траектории, когда нити, на которых висят шары, вертикальны. В этом положении все внешние силы, действующие на систему, направлены вертикально, поэтому проекция импульса системы сталкивающихся тел на горизонтальную ось сохраняется. Но поскольку скорости тел в этом положении направлены горизонтально, можно говорить и просто о законе сохранения импульса, не оговаривая, что следует учитывать только проекции импульсов на горизонтальную ось.

Если удар неупругий (сталкиваются пластилиновые шары, пуля пробивает шар или застревает в нем), то для стадии спуска (или подъема) шара (или шаров) на нити можно применить закон сохранения энергии, а для самого удара в нижней точке траектории можно применять только закон сохранения импульса. Закон сохранения энергии может понадобиться только для расчета доли механической энергии, перешедшей во внутреннюю энергию в ходе неупругого удара или «количества теплоты», выделившейся при ударе.

Рассмотрим пример с упругим и неупругим соударениями.

Пример 1.43. Два шарика, массы которых отличаются в 3 раза, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях (см. рис.). Легкий шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Каким будет отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков тотчас после их абсолютно упругого центрального удара?



Решение. Так как удар упругий, то при ударе применим и закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Mv_1^{\ 2}}{2} + \frac{mv_2^{\ 2}}{2}, \quad (1)$$

и закон сохранения импульса:

$$mv = Mv_1 + mv_{2x}. \qquad (2)$$

В уравнении записана проекция v_{2x} вектора $\vec{v}_2$, поскольку неясно отлетит легкий шарик или продолжит движение в том же направлении вслед за тяжелым шаром.

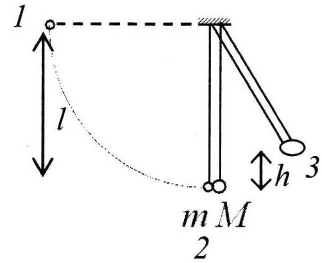
Из уравнения (2), с учетом условия $M = 3m$, получаем $v = 3v_1 + v_{2x}$, и, подставляя его в (1) приходим к выводу:

$$9v_1^{\ 2} + 6v_1v_{2x} + v_2^{\ 2} = 3v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} \text{ или } 6v_1v_{2x} = -6v_1^{\ 2} \text{ или } v_{2x} = -v_1,$$

то есть легкий шар, налетев на тяжелый шар, отлетит в обратном направлении со скоростью, равной скорости тяжелого шара. Раз скорости шаров после удара равны, то их кинетические энергии относятся как массы шаров, следовательно,

$$\frac{E_{кин1}(тяжелый)}{E_{кин2}(легкий)} = 3.$$

Пример 1.44. Два шарика, массы которых 200 г и 600 г, висят, соприкасаясь, на одинаковых нитях длиной 80 см. Первый шар отклонили на угол 90° и отпустили. На какую высоту поднимутся шарики после удара, если этот удар абсолютно неупругий?



Решение. Для полета легкого шарика из точки 1 в точку 2 применяем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1v_1^{\ 2}}{2} = m_1gl. \qquad (1)$$

Для неупругого удара в точке 2 выполняется закон сохранения импульса:

$$m_l v_1 = (m + M) v_2. \qquad (2)$$

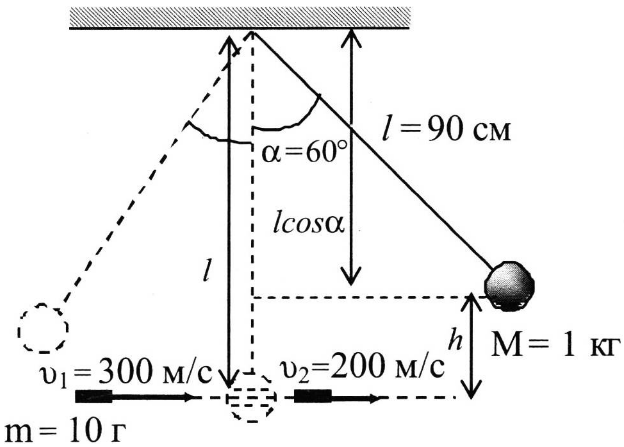
Для подъема слипшихся шариков из точки 2 в точку 3 – опять закон сохранения энергии:

$$\frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} = (m_1 + m_2) g h. \qquad (3)$$

Решив систему уравнений (1)–(3), получим $h = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 l = 0{,}05\ м$.

Пример 1.45. Шар массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 90 см, отводят от положения равновесия на угол 60° и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г, летящая навстречу шару со скоростью 300 м/с. Она пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью 200 м/с, после чего шар продолжает движение в прежнем направлении. На какой максимальный угол отклонится шар после попадания в него пули? (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити.)

Решение. Чертеж поясняющий, этапы процесса, показан на рисунке.



Для спуска шара в нижнюю точку траектории, где будем считать потенциальную энергию шара равной нулю, из точки на высоте h (рис.) применим закона сохранения механической энергии

$$Mgh = \frac{M u_1^2}{2}. \qquad (1)$$

Для процесса пробивания пулей шара применяется закон сохранения импульса:

$$M u_1 - m v_1 = M u_2 - m v_2. \qquad (2)$$

Знаки выбраны, исходя из условия в проекции на ось, направленную влево. По аналогии с применением закона сохранения механической энергии для спуска шара, применим его для подъема шара на высоту h_2 с отклонением нити на угол β после вылета пули:

$$\frac{Mu_2^{\ 2}}{2} = Mgh_2. \qquad (3)$$

Таким образом, решая систему из трех уравнений (1)–(3), записанную на основании законов сохранения энергии и импульса, можно ответить на вопрос задачи.

Из (1) скорость шара находится в нижней точке до попадания пули:

$$u_1 = \sqrt{2gh}\ .$$

Из (2) скорость шара определяется в нижней точке, сразу после вылета пули:

$$u_2 = u_1 + \frac{m}{M}(v_2 - v_1).$$

Из (3) выражается высота $h_2 = \dfrac{u_2^{\ 2}}{2g}$.

Учитывая геометрические соотношения, показанные на рисунке, высоты h и h_2 выражаются через начальный и искомый угол отклонения нити точке до попадания пули:

$$h = l(1 - cos\alpha) \text{ и } h_2 = l(1 - cos\beta).$$

Совокупное использование этих выражений приводит к соотношению:

$$\cos\beta = 1 - \frac{u_2^{\ 2}}{2gl} = 1 - \frac{1}{2gl}\left\{\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} + \frac{m}{M}(v_2 - v_1)\right\}^2 = \frac{7}{9},$$

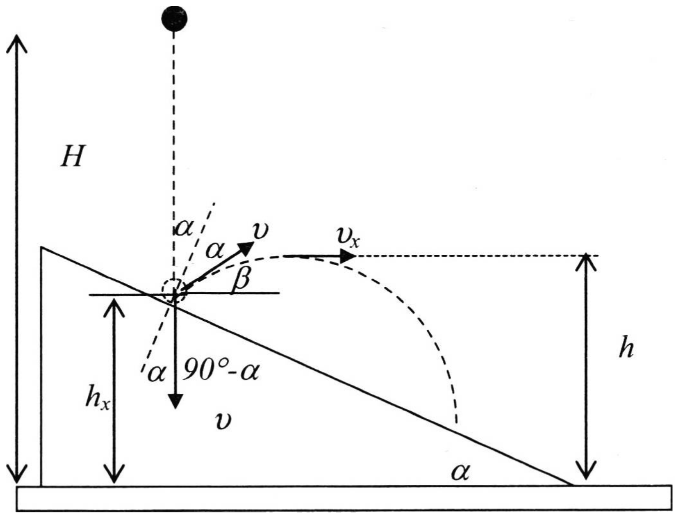
или $\beta = \arccos(7/9) \approx 39°$.

Совместное использование законов сохранения с уравнениями кинематики и законами Ньютона

Рассмотрим пару примеров, где уравнения, записываемые с использованием закона сохранения энергии при движении тела, дополняются для получения ответа уравнениями кинематики.

Пример 1.46. С высоты H над землёй начинает свободно падать стальной шарик, который через время t = 0,4 *с* сталкивается с плитой, наклонённой под углом 30° к горизонту. После абсолютно упругого удара он движется по траектории, верхняя точка которой находится на высоте h = 1,4 *м* над землёй. Чему равна высота H? Сделайте схематический рисунок, поясняющий решение.

Решение. Схема полета шарика показана на рисунке. Термин «упругое отражение» в данной задаче означает, что после удара о плоскость шарик отражается с той же по модулю скоростью, при этом угол между вектором скорости и плоскостью (или перпендикуляром к ней) при отскоке равен углу между вектором скорости после отражения и плоскостью (или перпендикуляром к ней). Как видно из рисунка, угол между перпендикуляром к плоскости в точке падения и скоростью равен α=30°. Тогда угол между вектором скорости после отражения и горизонтом равен β=(90°–2α)=30°.



Модуль скорости перед и после столкновения с плитой скорость равен

$$v = gt = 4\ м/с.$$

После соударения шарик движется как тело, брошенное со скоростью v под углом β=30°. Как известно горизонтальная составляющая скорости $v_x = v\cos\beta$ при таком полете (свободное падение, сила тяжести и ускорение тела направлены вертикально).

Так как при упругом ударе шарик меняет только направление движения, а кинетическая энергия шарика сохраняется, его механическая энергия в течение всего полета (от верхней точки на высоте H до удара и от удара до полета в точку на высоте h) остаётся постоянной. Считая потенциальную энергию у поверхности земли равной нулю, из закона сохранения механической энергии получим

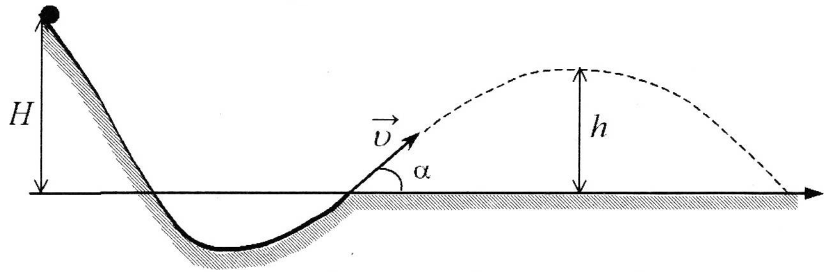
$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh_1 = \frac{m{v_x}^2}{2} + mgh.$$

Учитывая, что $v_x = v\cos\beta$, получим

$$gH = \frac{{v_x}^2}{2} + gh = \frac{v^2\cos^2\beta}{2} + gh.$$

Откуда $H = h + \dfrac{v^2\cos^2\beta}{2g}$. Учитывая полученные выше значения $v = 4\ м/с$ и β=30°, получим H=2 м.

<u>Пример 1.47.</u> При выполнении трюка «Летающий велосипедист» гонщик движется по трамплину под действием силы тяжести, начиная движение из состояния покоя с высоты H (см. рис.). На краю трамплина скорость гонщика направлена под таким углом к горизонту, что дальность его полета максимальна. Пролетев по воздуху, гонщик приземляется на горизонтальный стол, находящийся на той же высоте, что и край трамплина. Какова высота полета h на этом трамплине? Сопротивлением воздуха и трением пренебречь.



<u>Решение.</u> Будем решать задачу, считая гонщика материальной точкой, а его полет свободным падением с начальной скоростью, направленной под углом α к горизонту и равной по модулю v.

Модуль начальной скорости определяется из закона сохранения энергии для спуска по трамплину высоты H

$$\frac{mv^2}{2} = mgH \text{, откуда } v = \sqrt{2gH}.$$

Дальность полета определяется из выражения $s = \frac{2v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha$ (см. стр. 10), время полета $t_{пол}$ можно определить как время t, через которое координата тела $y(t) = 0 + v_0 \sin\alpha \cdot t + a_y \frac{t^2}{2}$ станет равной нулю; если начальная координата y_0 равнялась нулю, проекция ускорения на вертикальную ось $a_y = g$. Дальность полета можно получить, умножив горизонтальную составляющую начальной скорости $v_0 \cos\alpha$ на $t_{пол}$). Это выражение достигает максимального значения $\frac{v^2}{g}$ при условии $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 45°$.

Высота полета $h = \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha$ (находится из времени подъема до точки, где вертикальная составляющая скорости равняется нулю $t_{под} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ см и значения координаты тела $y(t) = 0 + v_0 \sin\alpha \cdot t + a_y \frac{t^2}{2}$ при $t = t_{пол}$, см. стр. 10), достигает значения $h_{макс} = \frac{v^2}{4g} = \frac{2gH}{4g} = \frac{H}{2}$.

<u>Пример 1.48.</u> На краю стола высотой h = 1,25 м лежит пластилиновый шарик массой m = 100 г. На него со стороны стола налетает по горизонтали другой пластилиновый шарик, имеющий скорость v = 0,9 м/с. Какой должна быть масса второго шарика, чтобы точка приземления шариков на пол была дальше от стола, чем заданное расстояние L = 0,3 м? (Удар считать центральным)

<u>Решение.</u> Для неупругого столкновения двух шариков закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось, направленную по скорости движения налетающего шарика:

$$Mv = (m + M)u. \qquad (1)$$

После удара шарики движутся как единое тело, брошенное горизонтально с высоты h. Время полета такого тела, согласно законам свободного падения (находится приравниванием нулю координаты $y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t + a_y \frac{t^2}{2}$ при $y_0 = h$, $v_0 = 0$ и $a_y = g$, см. стр. 10)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (2)$$

За это время оно сместится по горизонтали на расстояние

$$L = ut. \qquad (3)$$

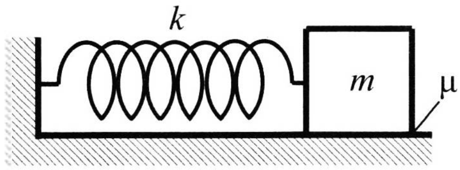
Решая систему уравнений (1) – (3), получим:

$$M = \frac{m}{\left(\frac{v}{L}\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right)},$$

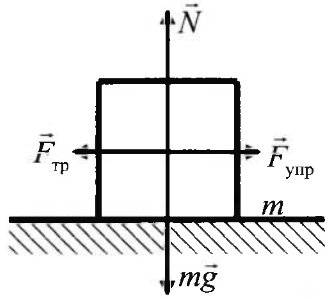
откуда получаем искомый результат:

$$M > \frac{m}{\left(\frac{v}{L}\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right)} \approx 0{,}2\,кг.$$

Максимально сложными задачами по механике являются задачи, в которых совместно следует использовать и законы сохранения энергии, и импульса, и законы Ньютона, а иногда и уравнения кинематики. Хотя выше было сказано, что законы сохранения доказаны для того, чтобы их использовать в задачах, где нельзя напрямую использовать законы Ньютона, иногда это оказывается просто удобным, а иногда и просто необходимым. Рассмотрим несколько примеров.



Пример 1.49. К одному концу лёгкой пружины жёсткостью k = 100 Н/м прикреплён массивный груз, лежащий на горизонтальной плоскости, другой конец пружины закреплён неподвижно (см. рис.). Коэффициент трения груза по плоскости μ = 0,2. Груз смещают по горизонтали, растягивая пружину, затем отпускают с начальной скоростью, равной нулю. Груз движется в одном направлении и затем останавливается в положении, в котором пружина уже сжата. Максимальное растяжение пружины, при котором груз движется таким образом, равно d = 15 см. Найдите массу m груза.



Решение. Начнем анализ задачи с конца. Найдём максимальное сжатие пружины b, при котором груз ещё покоится на столе при сжатой пружине. На груз действуют силы, показанные на рисунке (сама пружина не показана). Видно, что силу упругости уравновешивает сила трения покоя. При максимальном сжатии пружины, согласно закону Гука и закону сухого трения (с учетом N=mg) получим:

$$kb = \mu mg.$$

Отсюда $b = \dfrac{\mu mg}{k}$.

При движении груза из крайне правого положения, когда пружина растянута на d, до крайне левого положения, когда она сжата на b, действует сила трения, поэтому изменение механической энергии системы тел «груз + пружина» равно работе силы трения скольжения. Поскольку в двух крайних положениях груз покоится, его кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия груза, связанная с притяжением Земли, не меняется на горизонтальном столе, и механическая энергия системы тел состоит только из потенциальной энергии сжатой пружины. Значит,

$$\frac{kb^2}{2}-\frac{kd^2}{2}=-\mu mg(d+b) \text{ или}$$

$$\frac{k(b^2-d^2)}{2}=-\mu mg(d+b).$$

Учитывая, что слева в уравнении разность квадратов и (d + b)≠0, приходим после сокращения на (d + b) к уравнению:

$$\frac{k}{2}(b-d)=-\mu mg.$$

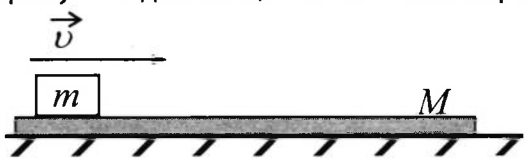
Так как $\frac{\mu mg}{k}=b$, оно преобразуется к виду:

$$b-d=-2b.$$

Откуда $d=3b=\frac{3\mu mg}{k}$. Это позволяет найти искомую массу груза

$$m=\frac{kd}{3\mu g}=2{,}5 \text{ кг}.$$

Пример 1.50. На гладкой горизонтальной плоскости находится длинная доска массой M = 2 кг. По доске скользит шайба массой m = 0,5 кг. Коэффициент трения между шайбой и доской μ = 0,2. В начальный момент времени скорость шайбы υ_0 = 2 м/с, а доска покоится. Сколько времени потребуется для того, чтобы шайба перестала скользить по доске?



Решение. Прежде всего, следует понять, из каких соображений можно найти искомое время. Чем характеризуется этот момент времени, когда шайба перестанет двигаться относительно доски? Это момент времени, когда оба тела начнут двигаться как единое целое со скоростью υ.

В ходе движения шайба замедляет свой ход относительно земли, а доска ускоряется, причем ускорение направлено горизонтально. Это ускорение происходит под действием нескольких сил, однако все силы, кроме силы трения, действующей со стороны шайбы, направлены вертикально. Значит, ускорение доски равно $a_M=\frac{F_{mp}}{M}$.

Зная ускорение доски, ее начальную скорость (равна нулю) и конечную (равна υ), можно будет найти время. Для этого нужно найти силу трения и скорость υ.

Чтобы найти силу трения, действующую на доску со стороны шайбы, надо вспомнить третий закон Ньютона. Если шайба действует на шайбу с силой трения, то доска действует на шайбу с такой же по модулю, но противоположно направленной силой трения. Поскольку шайба скользит по доске, силу трения, действующую на шайбу, можно вычислить по закону сухого трения

$$F_{mp}=\mu N.$$

Применив второй закон Ньютона для шайбы в проекции на вертикальную ось, мы получим $N = mg$. Тогда $F_{mp} = \mu mg$.

Приходим к выводу, что и доска ускоряется под действем силы трения, равной по модулю $F_{mp} = \mu mg$.

Тогда, применив второй закон Ньютона уже к доске, получим, что сумма проекции всех сил, действующих на нее, на вертикальную ось равна нулю. На горизонтальную ось единственная сила трения дает проекцию, равную μmg и $\mu mg = Ma$.

Значит, доска движется с ускорением $a = \mu \frac{m}{M} g$.

Осталось определить, какой скорости она достигает до момента времени, когда шайба перестает скользить относительно. В этом может помочь закон сохранения импульса.

В данном примере нет традиционного столкновения двух тел, при котором обычно вспоминается закон сохранения импульса. Однако следует обратить внимание, что внешние силы, действующие на систему тел «доска-шайба», направлены по вертикали и в сумме равны нулю. Поэтому для системы тел «доска-шайба» в системе отсчета, связанной с землей, может быть применен закон сохранения импульса. Система «шайба-доска» чем-то напоминают систему «пуля и ящик на льду», когда пуля застревает в ящике. Только в одном случае мы имеем дело с «внешним» трением, закономерности которого мы знаем, а во втором случае с «внутренним» трением. Пуля, в конечном итоге, перестает двигаться относительно ящика (застревает в нем), то есть начинает двигаться с ящиком как единое целое.

Осталось понять, для каких моментов времени записать импульс системы. Очевидно, для тех, когда он может быть вычислен, и для тех, которые требуются для решения задачи. Первому критерию удовлетворяет начальный момент времени, когда шайба движется, а доска еще нет. Импульс системы тел будет равен для этого момента времени mv_0. Второй момент времени – это когда шайба перестала скользить по бруску, что означает, что оба тела движутся с одинаковой скоростью v. Тогда закон сохранения импульса дает:

$$mv_0 = mv + Mv .$$

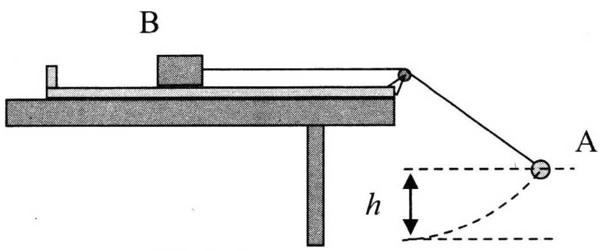
Откуда $v = \frac{mv_0}{m+M}$. Это позволяет вычислить время процесса ускорения доски до скорости v.

$$\tau = \frac{v}{a} = \frac{Mv}{\mu mg} = \frac{Mmv_0}{\mu mg(M+m)} = \frac{Mv_0}{\mu g(M+m)} = 0{,}8\,(\text{c}) .$$

Наибольшие затруднения возникают, когда законы сохранения и Ньютона надо применить к неравномерному движению по окружности. В этих задачах предполагается, что ученик знает, что при движении по окружности второй закон Ньютона трактуется так:

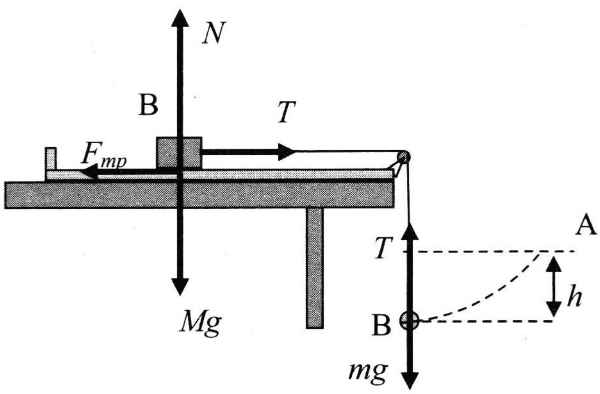
в момент времени, когда материальная точка движется по окружности радиуса R неравномерно и имеет скорость v, сумма проекции всех сил на ось направленную вдоль радиуса окружности равна произведению массы материальной точки m на центростремительное ускорение $a_{цс} = \frac{v^2}{R}$, а сумма проекций сил на ось, направленную по касательной к окружности, равна произведению массы точки на тангенциальное ускорение a_τ. А векторная сумма этих взаимно перпендикулярных ускорений равна векторной сумме всех сил, поделенной на массу точки.

Выделенную курсивом часть формулировки второго закона Ньютона для неравномерного движения по окружности и нужно применять при решении задач ЕГЭ, подобных приведенным ниже.



Пример 1.51. В установке, изображённой на рисунке, грузик A соединён перекинутой через блок нитью с бруском B, лежащим на горизонтальной поверхности трибометра, закреплённого на столе. Грузик отводят в сторону, приподнимая его на высоту h, и отпускают. Длина свисающей части нити равна L. Какую величину должна превзойти масса грузика, чтобы брусок сдвинулся с места в момент прохождения грузиком нижней точки траектории? Масса бруска M, коэффициент трения между бруском и поверхностью μ. Трением в блоке, а также размерами блока пренебречь.

Решение. На рисунке показаны направления действующих на брусок и шар сил и обозначены значения их модулей. Чтобы брусок сдвинулся с места, нужно, чтобы сила, действующая на него со стороны нити, превысила максимальную силу трения покоя: $T > F_{\text{тр. макс.}}$, $T > \mu Mg$.



Для нахождения силы натяжения нити используем второй закон Ньютона для грузика в нижнем положении. Хотя грузик движется неравномерно, в проекции на вертикальную ось, идущую вдоль радиуса окружности, по которой движется грузик, второй закон дает :

$$T - mg = ma_{цс} = \frac{mv^2}{L}. \qquad (1)$$

Для перехода грузика из точки А в точку В можно применить закон сохранения механической энергии:

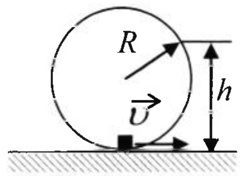
$$mgh = \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

Выразив из (2) $mv^2 = 2mgh$ и подставив в (1), получим:

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg = \frac{2mgh}{L} + mg = mg\left(\frac{2h}{L} + 1\right) > \mu Mg.$$

Откуда искомая масса $m > \dfrac{\mu M}{\dfrac{2h}{L} + 1}$.

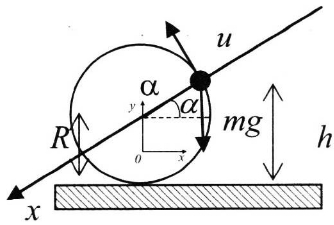
В банке заданий ЕГЭ встречаются и задачи, где выражение для центростремительного ускорения $a_{цс} = \frac{v^2}{r}$, выводимое в школьном курсе для равномерного движения по окружности, используется для описания для неравномерного движения по такой траектории. В курсах углубленного изучения физики рассматривается такой тип движения и показывается, что полное ускорение тела в этом случае можно представить как сумму двух векторов: нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного по радиусу и модуль которого как раз равен $a_n = a_{цс} = \frac{v^2}{r}$ (v – мгновенная скорость в данный момент времени в данной точке окружности), и тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к окружности. Нормальное ускорение показывает «темп поворота» вектора скорости при движении по окружности, а тангенциальное ускорение «темп увеличения модуля» вектора скорости. Разберем ряд таких задач, раз они встречаются в банке сложных заданий ЕГЭ.



Пример 1.52. Небольшая шайба после толчка приобретает скорость v = 2 м/с и скользит по внутренней поверхности гладкого закреплённого кольца радиусом R = 0,14 м. На какой высоте h шайба отрывается от кольца и начинает свободно падать?

Решение. Так как трения нет, выполняется закон сохранения энергии при переходе шайбы из нижней точки кольца в точку отрыва:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + mgh. \qquad (1)$$



В момент отрыва на шайбу действует только сила тяжести. Однако шайба еще движется по окружности. В соответствии со вторым законом Ньютона в системе отсчета, связанной со столом, проекция силы тяжести на ось, направленную вдоль радиуса окружности, по которой движется шайба, равна произведению ее массы на ее центростремительное ускорение $a_{цс} = \frac{u^2}{R}$:

$$ma_{цс} = mg\sin\alpha$$

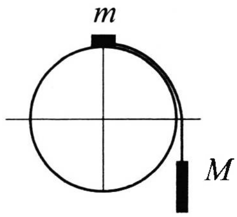
$$\frac{u^2}{R} = g\sin\alpha. \qquad (2)$$

Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{h-R}{R}$, из (1) и (2) получим:

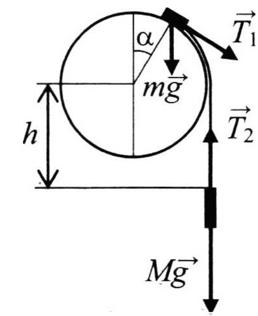
$$v^2 = g(h-R) + 2gh.$$

Отсюда $h = \frac{R}{3} + \frac{v^2}{3g} \approx 0{,}18$ (м).

Пример 1.53. Система из грузов m и M и связывающей их лёгкой нерастяжимой нити в начальный момент покоится в вертикальной плоскости, проходящей через центр закреплённой сферы. Груз m находится в точке А на вершине сферы (см. рис.). В ходе возникшего движения груз m отрывается от поверхности сферы, пройдя по ней дугу 30°. Найдите массу M, если m = 100 г. Размеры груза m ничтожно малы по сравнению с радиусом сферы. Трением пренебречь. Сделайте схематический рисунок с указанием сил, действующих на грузы.



Решение. Так как трения нет, в систему отсчёта, связанную с Землёй, инерциальной механическая энергия системы этих грузов сохраняется. Используя его, найдём модуль скорости груза m в точке его отрыва от поверхности сферы. За нуль отсчета потенциальной энергии примем горизонтальную плоскость, проходящую через центр окружности. В начальном состоянии груз M находится ниже центра сферы на величину h_0 и его потенциальная энергия отрицательна. Скорости связанных грузов в момент отрыва и в любой иной момент движения равны. В начальный момент времени грузы не двигались. Положения грузов в момент отрыва показаны на рисунке, легкий груз находится на высоте $R\cos\alpha$ относительно центра окружности. До отрыва грузы проходят путь, равный $h - h_0 = R\frac{\pi}{6}$, где h – высота нижнего груза, отсчитанная вниз от центра окружности.



Закон сохранения энергии тогда запишется как

$$mgR - Mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgR\cos\alpha + \frac{Mv^2}{2} + Mg(-h),$$

отсюда $v = \sqrt{\dfrac{2gR\left[m(1-\cos\alpha) + M\dfrac{\pi}{6}\right]}{m+M}}$.

Условие отрыва груза m от сферы – отсутствие силы реакции на груз. При этом груз m все еще ещё движется по окружности радиусом R, но уже не давит на сферу. Сила $\vec{T}_1$ направлена по касательной к сфере, поэтому его центростремительное ускорение вызвано только силой тяжести. Проекция силы тяжести на ось, идущую вдоль радиуса сферы в этот момент времени согласно второму закону Ньютона:

$$mg\cos\alpha = ma_{цс} = m\frac{v^2}{R}.$$

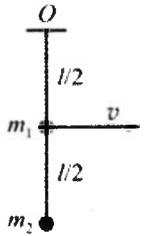
Подставляя сюда значение v, найденное выше, получим

$$\frac{2}{m+M}\left[m(1-\cos\alpha) + M\frac{\pi}{6}\right] = \cos\alpha,$$

отсюда

$$M = \frac{m(3\cos\alpha - 2)}{\dfrac{\pi}{3} - \cos\alpha} = 0{,}1 \cdot \frac{3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2}{\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}33\,(\text{кг}).$$

Пример 1.54. Невесомый стержень длиной $l = 1$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку О. Небольшие шарики массой $m_1 = 0{,}25$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг укреплены на стержне (см. рис.). Чему равна сила, с которой стержень действует на массу m_2 в нижней точке траектории, если груз массой m_1 в этот момент имеет скорость $\upsilon = 1$ м/с?



Решение. В инерциальной системе отсчета ускорение груза m_2 определяется вторым законом Ньютона:

$$m_2 a_2 = T - m_2 g.$$

Так как оба груза движутся с одинаковой угловой скоростью, то груз m_2 движется по окружности радиуса l со скоростью $\upsilon_2 = 2\upsilon$ и ее центростремительное ускорение: $a_2 = \frac{\upsilon_2^2}{l} = \frac{4\upsilon^2}{l}$.

Тогда сила натяжения стержня равна: $T = m_2\left(g + \frac{4\upsilon^2}{l}\right) = 7$ (Н).