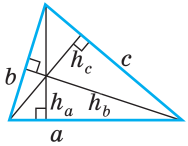
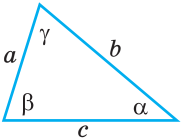
Площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей

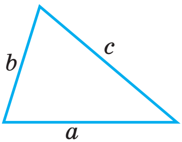
Площадь треугольника



$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$



$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$



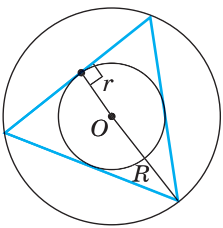
Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

или

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

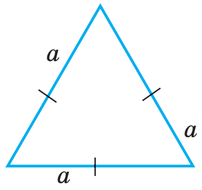
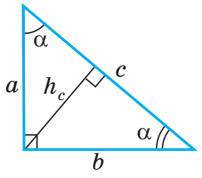


Нахождение площади через радиусы вписанной и описанной окружностей: r и R.

$S = p \cdot r$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$S = \dfrac{a+b+c}{2}r$, где r — радиус вписанной окружности.

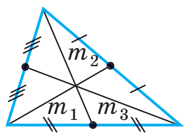
$S = \dfrac{abc}{4R}$ или $S = 2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, где R — радиус описанной окружности

	Площадь равностороннего треугольника: $$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
	Площадь прямоугольного треугольника: $$S = \frac{1}{2}ab$$ $$S = \frac{1}{2}ch_c$$ $$S = \frac{1}{2}ac\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\beta$$ Следствие: $h_c = \dfrac{ab}{c}$

Дополнительные формулы для площади треугольника

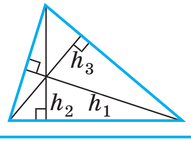
Через медианы треугольника m_1, m_2, m_3:

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)(-m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2 + m_3)(m_1 + m_2 - m_3)}$$

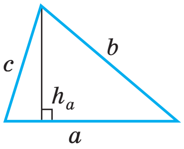


Через высоты треугольника h_1, h_2, h_3:

$$S = \sqrt{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)\left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right)}$$



Нахождение высоты произвольного треугольника методом площадей

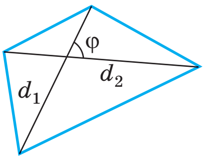


Метод площадей заключается в нахождении площади различными способами, далее из этого равенства находят различные элементы треугольника, например высоту

$S = \frac{1}{2} a h_a$ или

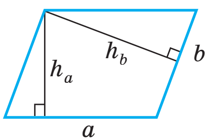
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$

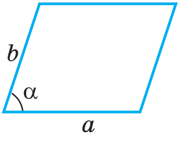
Площадь четырёхугольника

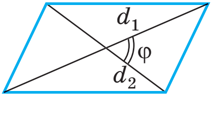


Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$





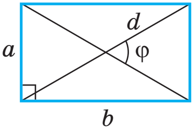


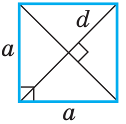
Площадь параллелограмма

$S = ah_a = ah_b$

$S = ab\sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi$

<table>
<tr>
<td>




</td>
<td>

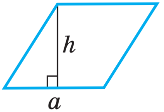
Площадь прямоугольника и квадрата

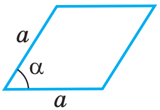
$S_{пр} = ab$

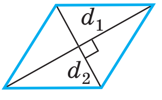
$S_{пр} = \frac{1}{2} d^2 \sin\phi$

$S_{кв} = a^2$

$S_{кв} = \frac{d^2}{2}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>






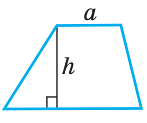
</td>
<td>

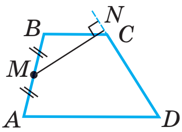
Площадь ромба

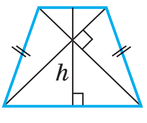
$S_р = ah$

$S_р = a^2 \sin\alpha$

$S_р = \frac{1}{2} d_1 d_2$

</td>
</tr>
<tr>
<td>






</td>
<td>

Площадь трапеции

$$S_{тр} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

или

$$S_{тр} = m \cdot h,$$

где $m = \frac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции.

$$S_{тр} = CD \cdot MN,$$

CD — боковая сторона; MN — перпендикуляр, проведённый из середины другой боковой стороны на CD

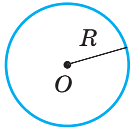
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

В равнобокой трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями площадь равна квадрату высоты:

$$S_{тр} = h^2$$

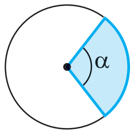
</td>
</tr>
</table>

Площадь круга и его частей



Круг — фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного.
Точка O — центр круга, данное расстояние R — радиус круга

Площадь круга: $S = \pi R^2$ или $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, где D — диаметр

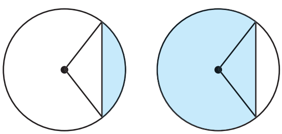


Круговой сектор — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла

Площадь кругового сектора

$S_{\text{сект}} = \dfrac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$, где n° — градусная мера соответствующего центрального угла.

$S_{\text{сект}} = \dfrac{\alpha R^2}{2}$, где α — радианная мера соответствующего центрального угла



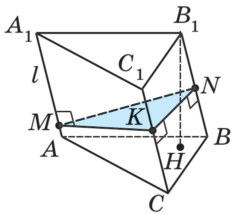
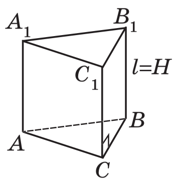
Круговой сегмент — общая часть круга и полуплоскости

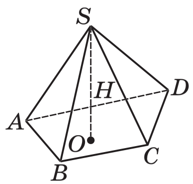
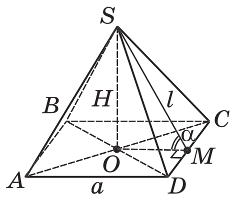
Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_\Delta,$$

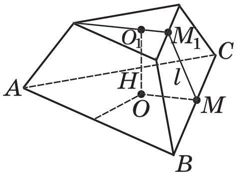
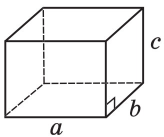
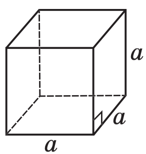
где n° — градусная мера соответствующего центрального угла;
S_Δ — площадь треугольника с вершиной в центре круга;
«+», если $n^\circ > 180^\circ$; «−», если $n^\circ < 180^\circ$

Площадь поверхности и объём многогранников

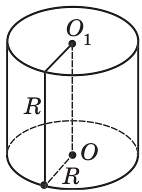
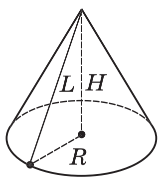
<table>
<tr><th>Вид многогранника</th><th>Боковая поверхность</th><th>Полная поверхность</th><th>Объём</th></tr>
<tr><td>Наклонная призма

</td><td>$S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$,
где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения;
l — длина бокового ребра
или
$S_{бок} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} + \ldots$</td><td>$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$</td><td>$V_{н.п.} = S_{\perp} \cdot l$,
или
$V_{н.п.} = S_{осн} \cdot H$</td></tr>
<tr><td colspan="2">MNK — перпендикулярное сечение;
l — боковое ребро; H — высота</td><td colspan="2">$S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного сечения;
l — длина бокового ребра;
$S_{осн}$ — площадь основания;
H — высота</td></tr>
<tr><td>Прямая призма

</td><td>$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$
или
$S_{бок} = P_{осн} \cdot l$</td><td rowspan="2">$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$</td><td rowspan="2">$V = S_{осн} \cdot H$
или
$V = S_{осн} \cdot l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Длина высоты совпадает с длиной бокового ребра</td></tr>
</table>

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Пирамида 	$S_{бок} = S_{ASB} + S_{BSC} + S_{CSD} + \ldots$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
Правильная пирамида 	$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$ $S_{бок} = \frac{n}{2} a \cdot l$ или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos \alpha}$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} =$ $= \frac{aln}{2} + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
	$S_{осн}$ — площадь основания; H — высота; l — апофема; a — сторона основания; α — угол наклона боковой грани		

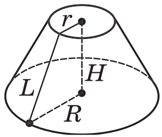
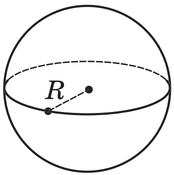
Окончание таблицы

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Правильная усечённая пирамида 	$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}$	$V = \frac{1}{3} H \Big(S_{\text{осн}_1} + \sqrt{S_{\text{осн}_1} \cdot S_{\text{осн}_2}} + S_{\text{осн}_2} \Big)$
Прямоугольный параллелепипед 	$S_{\text{бок}} = 2(a+b)c$	$S_{\text{полн}} = 2(ab+bc+ac)$	$V = abc$
Куб 	$S_{\text{бок}} = 4a^2$	$S_{\text{полн}} = 6a^2$	$V = a^3$

Площадь поверхности и объём тел вращения

Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Цилиндр 	$S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ $S_{полн} = 2\pi R(H+R)$	$V = \pi R^2 H$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота; $L = H$		
Конус 	$S_{бок} = \pi RL$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ $S_{полн} = \pi R(L+R)$	$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота		

Окончание таблицы

Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Усечённый конус 	$S_{бок} = \pi(R+r)L$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн_1} + S_{осн_2}$	$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$
	R и r — радиусы большего и меньшего оснований; L — образующая; H — высота		
Шар и сфера 	**Площадь сферы** $S_{сф} = 4\pi R^2$		**Объём шара** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
	R — радиус шара		

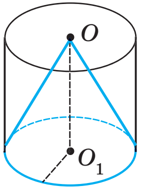
Комбинации тел

Комбинации многогранников

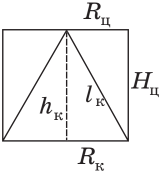
Многогранник называется **вписанным во второй многогранник,** если вершины первого лежат на поверхности (рёбрах, гранях) второго. Второй многогранник называется **описанным около первого**

Комбинации тел вращения

Цилиндр — конус



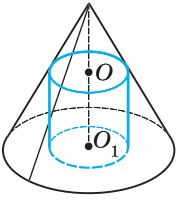
Конус называется **вписанным в цилиндр,** если основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина конуса лежит на втором основании цилиндра.
При этом цилиндр называется **описанным около** конуса.



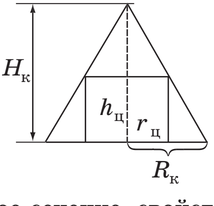
Осевое сечение, свойства

$$h_к = H_ц;\ R_к = R_ц,$$

$h_к$ и $H_ц$ — высоты конуса и цилиндра;
$R_к$ и $R_ц$ — радиусы конуса и цилиндра



Цилиндр называется **вписанным в конус,** если одно основание цилиндра лежит в основании конуса, а окружность второго основания лежит на боковой поверхности конуса.
При этом конус называется **описанным около** цилиндра.



Осевое сечение, свойства

$$\frac{R_к}{r_ц} = \frac{H_к}{H_к - h_ц},$$

$H_к$ и $h_ц$ — высоты конуса и цилиндра;
$R_к$ и $r_ц$ — радиусы конуса и цилиндра