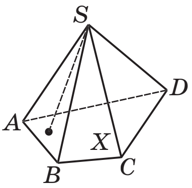
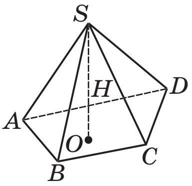
Пирамида



Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с вершинами основания

$ABCD$ — основание пирамиды;
S — вершина пирамиды;
SA, SB, SC, SD — боковые рёбра;
ΔASB, ΔBSC, ΔCSD, ΔASD — боковые грани



Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.
SO — высота пирамиды;
$SO = H$ ($SO \perp (ABCD)$).

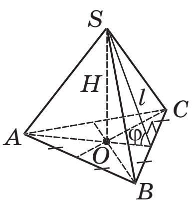
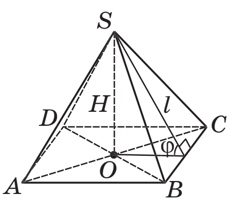
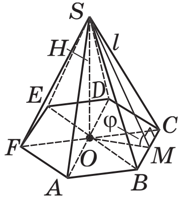
$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

$$S_{\text{бок. пир.}} = S_{\Delta DASB} + S_{\Delta DBSC} + S_{\Delta DCSD} + S_{\Delta DASD}$$

$$S_{\text{полн. пир.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Правильная пирамида

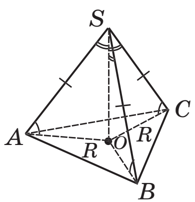
Пирамида называется **правильной,** если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника

Некоторые виды правильных пирамид	
	**Треугольная** ΔABC — правильный; O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей
	**Четырёхугольная** $ABCD$ — квадрат; O — точка пересечения диагоналей
	**Шестиугольная** $ABCDEF$ — правильный шестиугольник; O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC

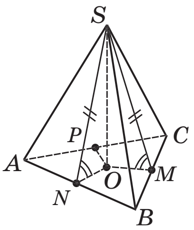
SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp (ABC)$);
O — центр основания;
SM — апофема правильной пирамиды ($SM \perp BC$) (высота боковой грани)

Свойства	Формулы
1. Боковые рёбра равны, одинаково наклонены к плоскости основания. $SA = SB = SC = \ldots$; $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots$ 2. Боковые грани — равные друг другу равнобедренные треугольники. $\Delta ASB = \Delta BSC = \ldots$ Апофемы равны и наклонены к плоскости основания под одним углом	**Площадь боковой поверхности** $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot SM = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l$, где l — апофема или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$, где φ — угол наклона боковой грани к плоскости основания, $\varphi = \angle SMO$ **Площадь полной поверхности** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ **Объём** $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, $H = SO$, H — высота пирамиды

Положение высоты в некоторых видах пирамид

	1. Если в пирамиде: а) все **боковые рёбра** равны или б) все **боковые рёбра** составляют одинаковые углы с плоскостью основания или в) **боковые рёбра** составляют одинаковые углы с высотой пирамиды, то **высота проходит через центр окружности, описанной около основания**

Примечание: высота пирамиды может располагаться внутри пирамиды, на боковой грани или вне пирамиды, в зависимости от размещения центра описанной окружности.
Около такой пирамиды можно описать конус



2. Если в пирамиде:
а) все **двугранные углы** при основании равны

или

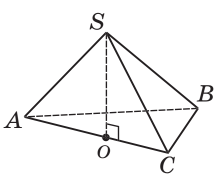
б) все **высоты боковых граней** равны

или

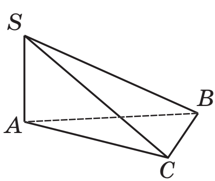
в) высота составляет одинаковые углы с плоскостями боковых граней, то **высота проходит через центр окружности, вписанной в основание**

В такую пирамиду можно вписать конус.
Площадь боковой поверхности пирамиды, в которой все **двугранные углы при основании равны** α, можно вычислять по формуле:

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$$

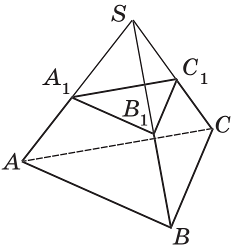


3. Если **одна боковая грань** пирамиды перпендикулярна **плоскости основания**, то **высотой пирамиды будет высота этой грани.**
Если в $SABC$ $(SAC \perp (ABC))$ и $SO \perp AC$ $(O \in AC)$,
то SO — высота пирамиды,
$SO \perp (ABC)$



4. Если **две смежные боковые** грани перпендикулярны плоскости основания, то **высотой пирамиды будет их общее боковое ребро.**
Если $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SAC) \perp (ABC)$,
то SA — высота пирамиды
$SA \perp (ABC)$

Усечённая пирамида

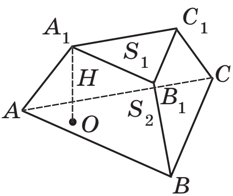


Образование усечённой пирамиды

Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды ($(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$), то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной. (С коэффициентом подобия

$$k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}.)$$

Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется **усечённой пирамидой.** Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — **основания** ($(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$). Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — **боковые грани.**



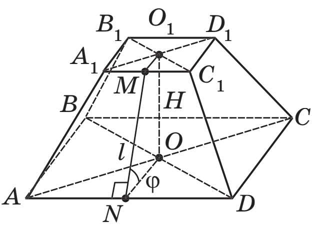
Высотой усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями её оснований.

$A_1O \perp (ABC)$;

$A_1O = H$ — высота

$$V_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right),$$

где S_1, S_2 — площади оснований



Площадь поверхности усечённой пирамиды равна сумме площадей оснований и боковой поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}.$$

Правильная усечённая пирамида — усечённая пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды.

Апофема — высота боковой грани.

$MN \perp AD$ и $MN \perp A_1D_1$.

MN — апофема

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды	
$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$, P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема	$S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi}$, S_1 и S_2 — площади оснований; φ — угол наклона боковой грани к большему основанию