2.1. Молекулярная физика

Задача 1

При повышении температуры идеального одноатомного газа на $\Delta T_1 = 150$ К среднеквадратичная скорость его молекул возросла от $v_1 = 400$ м/с до $v_2 = 500$ м/с. На какую величину ΔT_2 нужно дополнительно повысить температуру этого газа, чтобы увеличить среднеквадратичную скорость его молекул от $v_2 = 500$ м/с до $v_3 = 600$ м/с?

Идея. Используйте формулу для среднеквадратичной скорости молекул газа.

Указание. Выразите приращение температуры газа через разность средних квадратов скоростей молекул.

Решение. Поскольку при температуре T среднеквадратичная скорость молекул газа равна $v = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, справедливо соотношение $v_2^2 - v_1^2 = \dfrac{3k}{m_0}(T_2 - T_1) = \dfrac{3k}{m_0}\Delta T_1$, где k – постоянная Больцмана, m_0 – масса молекулы. Аналогично $v_3^2 - v_2^2 = \dfrac{3k}{m_0}(T_3 - T_2) = \dfrac{3k}{m_0}\Delta T_2$. Следовательно, $\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \dfrac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2}$, и $\Delta T_2 = \Delta T_1 \dfrac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183{,}3$ К.

Ответ. $\Delta T_2 = \Delta T_1 \dfrac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183{,}3$ К.

Задача 2

Плотность смеси азота и кислорода при температуре $t = 17$ °C и давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Найдите концентрации n_1 и n_2 молекул азота и кислорода в смеси. Молярная масса азота $M_1 = 28$ г/моль, кислорода $M_2 = 32$ г/моль. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

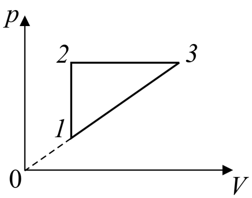
Идея. Используйте формулы для плотности и давления идеального газа.

Указание. Запишите выражения для плотности и давления смеси двух идеальных газов.

Решение. Плотность и давление идеального газа выражаются следующим образом: $\rho = n\dfrac{M}{N_A}$, $p = nkT$, где n – концентрация молекул, M – молярная масса газа, k – постоянная Больцмана, N_A – число Авогадро, T – абсолютная температура. Используя эти выражения, для смеси газов получаем систему уравнений $n_1 \dfrac{M_1}{N_A} + n_2 \dfrac{M_2}{N_A} = \rho$, $n_1 kT + n_2 kT = p_0$. Отсюда, учитывая, что $kN_A = R$, находим $n_1 = \dfrac{p_0 M_2 - \rho RT}{kT(M_2 - M_1)} \approx$ $\approx 1{,}9 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $n_2 = \dfrac{\rho RT - p_0 M_1}{kT(M_2 - M_1)} \approx 0{,}57 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Ответ. $n_1 = \dfrac{p_0 M_2 - \rho RT}{kT(M_2 - M_1)} \approx 1{,}9 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $n_2 = \dfrac{\rho RT - p_0 M_1}{kT(M_2 - M_1)} \approx 0{,}57 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 3



На рисунке показан циклический процесс, совершаемый над идеальным газом, причем *1 – 2* – изохорный, *2 – 3* – изобарный процессы. Температуры газа в точках *1* и *3* равны соответственно $T_1 = 300$ К и $T_3 = 400$ К. Найти температуру T_2 газа в точке *2*. Масса газа постоянна.

Идея. Примените законы газового состояния.

Указание 1. Для участка *1 – 2* используйте закон Шарля.

Указание 2. Для участка *2 – 3* используйте закон Гей-Люссака.

Указание 3. Учтите, что продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат.

Решение. Пусть p_1, V_1 – давление и объем газа в точке *1*, p_2 – давление газа в точке *2*, V_3 – объем газа в точке *3*. Для участка *1 – 2* по закону Шарля $\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2}$, для участка *2 – 3* по закону Гей-Люссака $\dfrac{V_1}{T_2} = \dfrac{V_3}{T_3}$. Поскольку продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат, $\dfrac{p_1}{V_1} = \dfrac{p_2}{V_3}$. Объединяя записанные выражения, получаем $T_2 = \sqrt{T_1 T_3} \approx 346$ К.

Ответ. $T_2 = \sqrt{T_1 T_3} \approx 346$ К.

Задача 4

Два одинаковых сосуда, соединенные трубкой, содержат идеальный газ общей массой $m = 6{,}6$ г. Первоначально температура газа в обоих сосудах одинакова. Затем газ в первом сосуде нагревают и поддерживают при температуре $t_1 = 27$ °C, а газ во втором сосуде нагревают и поддерживают при температуре $t_2 = 87$ °C. На какую величину Δm изменится масса газа в первом сосуде? Объем трубки не учитывать.

Идея. Используйте уравнение Менделеева–Клапейрона.

Указание. Учтите, что давление газа в сосудах выравнивается за счет перетекания газа по трубке.

Решение. В начальном состоянии масса газа в каждом сосуде равна $m_0 = m/2$. Уравнения конечного состояния газов имеют вид $pV = \frac{m_1}{M}RT_1$, $pV = \frac{m_2}{M}RT_2$, где p – давление газа, одинаковое в обоих сосудах; V – объем одного из сосудов; m_1 и m_2 – массы газа в первом и втором сосуде; M – их молярная масса; $T_1 = t_1 + 273$ °C; $T_2 = t_2 + 273$ °C. Следовательно, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_2}{T_1}$, $m_1 + m_2 = m$. Отсюда $m_1 = \frac{mT_2}{T_1 + T_2}$. Учитывая, что $\Delta m = m_1 - m_0$, получаем $\Delta m = \frac{m(t_2 - t_1)}{2(t_1 + t_2 + 546\text{ °C})} = 0{,}3$ г.

Ответ. $\Delta m = \frac{m(t_2 - t_1)}{2(t_1 + t_2 + 546\text{ °C})} = 0{,}3$ г.

Задача 5

В комнате объемом $V = 60$ м^3 температура с $t_1 = 17$ °C поднялась до $t_2 = 27$ °C. На какую величину Δm изменилась масса воздуха в комнате, если атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па? Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Примените уравнение Менделеева–Клапейрона.

Указание. Запишите уравнения начального и конечного состояний воздуха в комнате.

Решение. Пусть m_1 и m_2 – массы воздуха в комнате при температурах $T_1 = t_1 + 273$ °C и $T_2 = t_2 + 273$ °C соответственно. Уравнения состояния воздуха в комнате имеют вид $p_0V = \frac{m_1}{M}RT_1$, $p_0V = \frac{m_2}{M}RT_2$. Отсюда $m_{1,2} = \frac{p_0VM}{RT_{1,2}}$, $\Delta m = m_2 - m_1 =$ $= \frac{p_0VM(t_1 - t_2)}{R(t_1 + 273\text{ °C})(t_2 + 273\text{ °C})} = -2{,}4$ кг. Масса воздуха в комнате уменьшилась.

Ответ. $\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{p_0VM(t_1 - t_2)}{R(t_1 + 273\text{ °C})(t_2 + 273\text{ °C})} = -2{,}4$ кг.

Задача 6

Закрытый с обоих концов горизонтальный цилиндр заполнен идеальным газом при температуре $t = 27\,^\circ\mathrm{C}$ и разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной $L = 50$ см каждая. На какую величину Δt нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние $l = 20$ см при неизменной температуре газа во второй половине цилиндра?

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание. Используйте закон Бойля–Мариотта для газа в той части цилиндра, которая имеет постоянную температуру, и уравнение состояния для газа в другой части цилиндра.

Решение. Для части газа, имеющей постоянную температуру, справедлив закон Бойля–Мариотта, согласно которому $pLS = p_1(L-l)S$, где p – первоначальное давление газа в цилиндре, p_1 – давление в цилиндре после нагревания половины газа, S – площадь поршня. Уравнение состояния, записанное для газа в другой части цилиндра, дает соотношение $\dfrac{pLS}{T} = \dfrac{p_1(L+l)S}{T+\Delta T}$. Исключая из этих равенств p и p_1, получаем $\Delta T = \dfrac{2lT}{L-l} = 400$ К.

Ответ. $\Delta T = \dfrac{2lT}{L-l} = 400$ К.

Задача 7

Закрытый сосуд заполнен газом при температуре $T_0 = 300$ К и давлении $p_0 = 150$ кПа. Сосуд снабжен предохранительным клапаном, открывающимся при давлении, превышающем $p_\text{м} = 200$ кПа. Сосуд нагрели до температуры $T_1 = 600$ К. При этом из него вышло $m = 10$ г газа. Определить массу m_0 газа в сосуде до его нагрева.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание 1. Запишите уравнение начального и конечного состояний газа в сосуде.

Указание 2. Учтите, что после того, как давление при нагревании достигнет значения $p_\text{м}$, оно остается постоянным.

Решение. Уравнение начального состояния газа в сосуде имеет вид $p_0V = \dfrac{m_0}{M}RT_0$, где V – объем сосуда, M – молярная масса газа. При нагревании сосуда до некоторой температуры, при которой давление газа становится равным $p_\text{м}$, клапан открывается, после чего давление газа в сосуде остается постоянным, а излишек газа выходит наружу. Конечное состояние газа описывается уравнением $p_\text{м}V = \dfrac{m_0-m}{M}RT_1$. Исключая V и M, получаем $m_0 = \dfrac{mp_0T_1}{p_0T_1 - p_\text{м}T_0} = 30$ г.

О т в е т. $m_0 = \dfrac{mp_0T_1}{p_0T_1 - p_{\text{м}}T_0} = 30$ г.

Задача 8

В вертикально расположенном цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень помещают гирю массой $m = 10$ кг. На какую величину Δh переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, площадь поршня $S = 100$ см^2, расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра $h_0 = 100$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

И д е я. Воспользуйтесь законом Бойля–Мариотта.

У к а з а н и е. Используйте условия равновесия поршня в первом и втором случае.

Р е ш е н и е. Из условия равновесия поршня следует, что давление воздуха в сосуде равно p_0 в начальном состоянии и $p_0 + \dfrac{mg}{S}$, когда на поршень положили гирю. По закону Бойля–Мариотта имеем $p_0V_0 = \left(p_0 + \dfrac{mg}{S}\right)V$, где $V_0 = h_0S$, $V = (h_0 - \Delta h)S$. Отсюда находим $\Delta h = \dfrac{mgh_0}{Sp_0 + mg} = 8{,}9$ см.

О т в е т. $\Delta h = \dfrac{mgh_0}{Sp_0 + mg} = 8{,}9$ см.

Задача 9

В цилиндре под подвижным поршнем находится идеальный газ, поддерживаемый при постоянной температуре. Когда на поршень положили груз массой M_1, объем газа уменьшился в n раз. Какой массы M_2 груз нужно положить на поршень дополнительно, чтобы объем газа уменьшился еще в k раз?

И д е я. Воспользуйтесь законом Бойля–Мариотта.

У к а з а н и е. Используйте условия равновесия поршня во всех случаях, перечисленных в условии задачи.

Р е ш е н и е. Пусть m – масса поршня, S – его площадь, $p_{\text{А}}$ – атмосферное давление. Обозначив через p_0, p_1 и p_2 давление в цилиндре без груза на поршне, с грузом M_1 и с грузами M_1 и M_2 на поршне соответственно, запишем условия равновесия поршня, справедливые в этих случаях: $mg + p_{\text{А}}S = p_0S$, $(M_1 + m)g + p_{\text{А}}S = p_1S$,

$(M_1 + M_2 + m)g + p_A S = p_2 S$. Поскольку температура газа постоянна, из закона Бойля–Мариотта следует, что $p_1 = np_0$, $p_2 = kp_1 = nkp_0$. Исключая из этих уравнений m, S, p_A и p_0, получаем $M_2 = M_1 \dfrac{n(k-1)}{n-1}$.

Ответ. $M_2 = M_1 \dfrac{n(k-1)}{n-1}$.

Задача 10

Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. В обеих частях сосуда содержится один и тот же идеальный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H_1 = 30$ см. Сосуд переворачивают так, что дном становится его верхняя плоскость. В новом положении расстояние между дном сосуда и поршнем составляет $H_2 = 20$ см. Найти отношение α массы газа, содержавшегося в той части сосуда, которая первоначально находилась вверху, к массе газа, содержавшегося в другой части сосуда. Высота сосуда $L = 60$ см. Температуру считать постоянной, толщиной поршня пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание 1. Запишите уравнения состояния газа, находящегося в верхней и нижней части сосуда.

Указание 2. Используйте условие равновесия поршня.

Решение. Обозначим через m_1, p_1' и m_2, p_2' массы и давление газа, содержащегося соответственно в нижней и верхней частях сосуда в его начальном положении. По условию $\dfrac{m_2}{m_1} = \alpha$, или $m_2 = \alpha m_1$. Из уравнений состояния газов в нижней и верхней частях сосуда следует, что $p_1' = \dfrac{m_1 RT}{MH_1 S}$, $p_2' = \dfrac{\alpha m_1 RT}{M(L - H_1)S}$. Когда сосуд переворачивают вверх дном, в нижней его части оказывается газ массой $m_2 = \alpha m_1$ под давлением p_2'', а в верхней части – газ массой m_1 под давлением p_1'', причем $p_1'' = \dfrac{m_1 RT}{M(L - H_2)S}$, $p_2'' = \dfrac{\alpha m_1 RT}{MH_2 S}$. Из условия равновесия поршня вытекает соотношение $p_1' - p_2' = p_2'' - p_1''$. Подставляя сюда найденные выше значения давления, получаем равенство $\dfrac{1}{H_1} - \dfrac{\alpha}{L - H_1} = \dfrac{\alpha}{H_2} - \dfrac{1}{L - H_2}$. Отсюда находим $\alpha = \dfrac{(L - H_2 + H_1)\cdot(L - H_1)H_2}{(L - H_1 + H_2)\cdot(L - H_2)H_1} = 0{,}7$.

Ответ. $\alpha = \dfrac{(L - H_2 + H_1)\cdot(L - H_1)H_2}{(L - H_1 + H_2)\cdot(L - H_2)H_1} = 0{,}7$.

Задача 11

В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При некоторой температуре, одинаковой во всем цилиндре, объем V_1 нижней части цилиндра равен объему V_2 верхней части. Каким будет отношение объемов $\alpha = V_1/V_2$, если температуру газа увеличить в $n = 2$ раза? Толщиной поршня пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

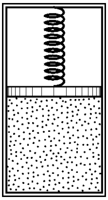
Указание 1. Запишите уравнения состояния газа, находящегося в верхней и нижней части сосуда.

Указание 2. Используйте условие равновесия поршня.

Решение. Обозначим через V объем половины цилиндра. Из соотношений $\frac{V_1}{V_2} = \alpha$, $V_1 + V_2 = 2V$ выражаем $V_1 = \frac{2\alpha V}{\alpha+1}$, $V_2 = \frac{2V}{\alpha+1}$. Используя уравнения состояния газа в нижней и верхней части цилиндра, находим давления газа в этих частях: $p_1 = \frac{2\nu RT}{V}$, $p_2 = \frac{\nu RT}{V}$ (при начальной температуре T), $p_1' = \frac{2\nu RnT(\alpha+1)}{2\alpha V}$, $p_2' = \frac{\nu RnT(\alpha+1)}{2V}$ (при температуре nT). Здесь ν – количество молей газа в верхней части цилиндра. Из условия равновесия поршня вытекает соотношение $p_1 - p_2 = p_1' - p_2'$. Подставляя сюда найденные выше значения давления, получаем квадратное уравнение относительно α: $\alpha^2 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\alpha - 2 = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 + 2} = \sqrt{2}$.

Ответ. $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 + 2} = \sqrt{2}$.

Задача 12



В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ. В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра, причем пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. Во сколько раз n возрастет объем газа, если увеличить его температуру в $m = 2$ раза? Толщиной поршня пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание 1. Используйте закон Гука.

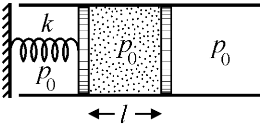
Указание 2. Запишите уравнения начального и конечного состояний газа.

Решение. Поскольку сжатие пружины совпадает с высотой поршня над дном сосуда, давление газа пропорционально его объему: $p \sim V$. Пусть p_0, V_0 и T_0 – начальные давление, объем и температура газа. Уравнения начального и конечного состояний газа имеют вид: $p_0V_0 = \nu RT_0$, $np_0nV_0 = \nu RmT_0$. Отсюда $n^2 = m$, и $n = \sqrt{m} \approx 1{,}41$.

Ответ. $n = \sqrt{m} \approx 1{,}41$.

Задача 13

Горизонтальная трубка площадью сечения S, открытая с двух концов, закреплена неподвижно. В ней находятся два поршня, один из которых соединен пружиной жесткостью k с неподвижной стенкой. В исходном состоянии давление воздуха между поршнями равно атмосферному давлению p_0, пружина не деформирована и расстояние между поршнями равно l. Правый поршень медленно переместили вправо на расстояние l. Какое давление воздуха p_1 установилось при этом между поршнями? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь законом Бойля–Мариотта.

Указание 1. Запишите условие равновесия левого поршня в конечном состоянии.

Указание 2. Для газа, заключенного между поршнями, используйте закон Бойля–Мариотта.

Решение. При перемещении правого поршня вправо на расстояние l левый поршень переместится в ту же сторону на некоторое расстояние. Условие равновесия левого поршня имеет вид $p_0S - kx - p_1S = 0$. Отсюда давление воздуха между поршнями $p_1 = p_0 - \dfrac{kx}{S}$. Из закона Бойля–Мариотта следует равенство $p_0l = p_1(2l - x)$. Исключая из этих соотношений x, получаем квадратное уравнение относительно p_1: $p_1^2 - \left(p_0 - \dfrac{2kl}{S}\right)p_1 - \dfrac{p_0kl}{S} = 0$. Выбирая положительный корень этого уравнения, получаем $p_1 = \dfrac{p_0}{2} - \dfrac{kl}{S} + \sqrt{\dfrac{p_0^2}{4} + \left(\dfrac{kl}{S}\right)^2}$.

Ответ. $p_1 = \dfrac{p_0}{2} - \dfrac{kl}{S} + \sqrt{\dfrac{p_0^2}{4} + \left(\dfrac{kl}{S}\right)^2}$.

Задача 14

В баллоне, снабженном предохранительным клапаном, находится идеальный газ под давлением $p = 0{,}5 \cdot 10^6$ Па при температуре $t = 27$ °С. Клапан открывается, если давление в баллоне превышает $p_1 = 0{,}6 \cdot 10^6$ Па. До какой температуры t_1 нужно нагреть баллон, чтобы из него вытекла часть газа, масса которой составляет $\beta = 0{,}01$ первоначальной массы?

Идея. Используйте уравнение состояния идеального газа.

Указание 1. Учтите, что после открывания клапана давление газа в сосуде остается постоянным, а излишек газа выходит наружу.

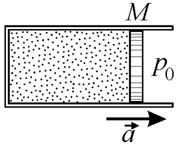
Указание 2. Запишите уравнения начального и конечного состояния газа.

Решение. Уравнение начального состояния газа в сосуде имеет вид $pV = \dfrac{m_0}{M}RT$, где V – объем сосуда, m_0 – первоначальная масса газа, M – его молярная масса, $T = t + 273$ °С. При нагревании сосуда до некоторой температуры, при которой давление газа становится равным p_1, клапан открывается, после чего давление газа в сосуде остается постоянным, а излишек газа выходит наружу. Поскольку масса газа, вытекшего из сосуда при нагревании, равна βm_0, масса оставшегося газа составляет $(1-\beta)m_0$. Следовательно, конечное состояние газа описывается уравнением $p_1V = \dfrac{(1-\beta)m_0}{M}RT_1$, где $T_1 = t_1 + 273$ °С. Исключая V, m_0 и M, получаем $t_1 = \dfrac{p_1(t + 273\ °\text{C})}{p(1-\beta)} - 273\ °\text{C} =$ $= 90{,}6$ °С.

Ответ. $t_1 = \dfrac{p_1(t + 273\ °\text{C})}{p(1-\beta)} - 273\ °\text{C} = 90{,}6\ °\text{C}$.

Задача 15

В горизонтальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой $M = 20$ кг и площадью $S = 100$ см^2 находится идеальный газ. Расстояние от поршня до дна сосуда $l = 55$ см. На какое расстояние Δl и в какую сторону переместится поршень, если цилиндр начать двигать с ускорением $a = 5$ м/с^2, как показано на рисунке. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температура газа не изменяется. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь. Считать, что при сообщении цилиндру ускорения колебания поршня не возникают.



Идея. Используйте закон Бойля–Мариотта.

Указание. Запишите уравнение движения поршня и найдите давление газа в цилиндре.

Решение. Уравнение движения поршня с ускорением a имеет вид $Ma = pS - p_0 S$. Отсюда давление газа в ускоренно движущемся цилиндре $p = p_0 + \frac{Ma}{S}$. По закону Бойля–Мариотта $p_0 lS = p(l - \Delta l)S$. Объединяя записанные равенства, получаем, что $\Delta l = \frac{Mal}{p_0 S + Ma} = 5$ см. Поршень переместится влево.

Ответ. Поршень переместится влево на $\Delta l = \frac{Mal}{p_0 S + Ma} = 5$ см.

Задача 16

Какой массой m должно обладать сферическое тело радиуса $r = 1$ м, чтобы оно могло плавать в атмосфере Венеры? Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа, давление у поверхности $p_0 = 9$ МПа, температура $t = 527$ °С. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Молярная масса углекислого газа $M = 44$ г/моль.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда.

Указание 1. Используйте условие плавания тел.

Указание 2. Найдите плотность атмосферы Венеры.

Решение. По закону Архимеда сфера будет плавать при выполнении условия $mg \le \rho g V$, где g – ускорение свободного падения у поверхности Венеры, $\rho = \frac{p_0 M}{RT}$ – плотность атмосферы Венеры, $T = 1 + 273$ °С – абсолютная температура атмосферы, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ – объем тела. Следовательно, $m \le \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0 M}{RT} \approx 249$ кг.

Ответ. $m \le \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0 M}{RT} \approx 249$ кг.

Задача 17

Воздух в комнате объемом $V = 50$ м^3 имеет температуру $t = 27$ °С и относительную влажность $f_1 = 30\%$. Сколько времени τ должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\mu = 2$ кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $f_2 = 70\%$? Давление насыщенных паров воды при $t = 27$ °С равно $p_н = 3665$ Па, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), молярная масса воды $M = 18$ г/моль.

Идея. Используйте определение относительной влажности воздуха.

Указание. Примените для водяного пара уравнение Менделеева–Клапейрона.

Решение. Парциальное давление водяного пара при относительной влажности f_1 равно $p_1 = f_1 p_н / 100\%$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона $p_1 V = \frac{m_1}{M} R(t + 273°C)$ находим начальную массу пара, содержащегося в комнате: $m_1 = \frac{f_1 M p_н V}{100\% \cdot R(t + 273°C)}$. Аналогично при относительной влажности f_2 масса пара $m_2 = \frac{f_2 M p_н V}{R(t + 273°C) \cdot 100\%}$. Учитывая, что $\tau = \frac{m_2 - m_1}{\mu}$, получаем $\tau = \frac{p_н (f_2 - f_1) MV}{100\% \cdot \mu R(t + 273°C)} = 15{,}5$ мин.

Ответ. $\tau = \frac{p_н (f_2 - f_1) MV}{100\% \cdot \mu R(t + 273°C)} = 15{,}5$ мин.

Задача 18

Определить массу воды m, которую теряет человек за $\tau = 1$ ч. в процессе дыхания, исходя из следующих данных. Относительная влажность вдыхаемого воздуха $f_1 = 60\%$, относительная влажность выдыхаемого воздуха $f_2 = 100\%$. Человек делает в среднем $n = 15$ вдохов в минуту, вдыхая каждый раз $V = 2{,}5$ л воздуха. Температуру вдыхаемого и выдыхаемого воздуха принять $t = 36$ °C; давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_н = 5{,}9$ кПа. Молярная масса воды $M = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Используйте определение относительной влажности воздуха.
Указание. Примените для водяного пара уравнение Менделеева–Клапейрона.

Решение. Пусть p_1 и p_2 – парциальные давления водяного пара во вдыхаемом и выдыхаемом воздухе соответственно. Для них справедливы выражения $p_1 = \frac{f_1 p_н}{100\%}$, $p_2 = \frac{f_2 p_н}{100\%}$. Обозначим через $V_0 = n\tau V$ полный объем воздуха, вдыхаемого или выдыхаемого за время τ. Из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для водяного пара, следует, что массы пара, содержащегося во всем объеме воздуха, который человек вдыхает и выдыхает за время τ, соответственно равны $m_1 = \frac{p_1 V_0 M}{RT}$, $m_2 = \frac{p_2 V_0 M}{RT}$. Масса теряемой человеком воды $m = m_2 - m_1$. Объединяя записанные выражения, получаем $m = \frac{p_н n V \tau M (f_2 - f_1)}{RT \cdot 100\%} \approx 37{,}3$ г.

Ответ. $m = \frac{p_н n V \tau M (f_2 - f_1)}{RT \cdot 100\%} \approx 37{,}3$ г.

Задача 19

В стеклянную банку объемом 1 л налили 0,5 л воды при температуре $t_1 = 20\,°C$ и герметично закрыли завинчивающейся крышкой. Затем банку нагрели до температуры $t_2 = 100\,°C$. Найти силу взаимодействия F между банкой и крышкой при достижении этой температуры. Площадь крышки $S = 50$ см^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Влажностью атмосферного воздуха, а также массой крышки пренебречь.

Идея. Используйте свойства водяного пара и условие равновесия крышки.

Указание 1. Учтите, что при температуре $t_2 = 100\,°C$ давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению.

Указание 2. Примените для сухого воздуха закон Шарля.

Решение. В банке под крышкой находится воздух и насыщенный водяной пар. При температуре $t_2 = 100\,°C$ давление насыщенного пара равно атмосферному давлению: $p_{н} = p_0$. Таким образом, парциальное давление водяного пара компенсирует атмосферное давление. Сила, которая действует на крышку со стороны банки, равна по величине $F = Sp_{в}$, где $p_{в}$ – парциальное давление воздуха в банке. Пренебрегая изменением объема воздуха, связанным с частичным испарением воды и ее тепловым расширением, для определения давления воздуха можно использовать закон Шарля, согласно которому $p_{в} = p_0 \dfrac{T_2}{T_1}$. Следовательно, $F = Sp_0 \dfrac{t_2 + 273\,°C}{t_1 + 273\,°C} \approx 640$ Н.

Ответ. $F \approx 640$ Н.

Задача 20

Трубка с поперечным сечением S, заполненная водяным паром под давлением p, запаяна с двух концов и расположена горизонтально. При этом находящийся в трубке поршень делит трубку на две равных части. Трубку ставят вертикально, в результате чего поршень смещается, и объем под ним уменьшается в четыре раза. Найти массу поршня m, если давление насыщенного водяного пара равно $2p$. Трением и толщиной поршня пренебречь, температуру пара считать постоянной. Ускорение свободного падения g.

Идея. Используйте свойства водяного пара и условие равновесия поршня.

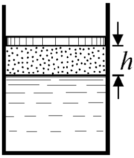
Указание. Учтите, что пар под поршнем достигнет насыщения. Примените для пара над поршнем закон Бойля–Мариотта.

Решение. При перемещении поршня давление пара в нижней части трубки увеличится до величины $2p$, после чего будет оставаться постоянным. При этом часть пара сконденсируется. Пар над поршнем можно считать идеальным газом. Его давление, согласно закону Бойля–Мариотта, равно $p_1 = p\dfrac{V}{V_1} = p\dfrac{V}{V + 3V/4} = \dfrac{4}{7}p$. Из условия равновесия поршня имеем $p_1 S + mg = 2pS$. Объединяя записанные выражения, получаем $m = \left(2 - \frac{4}{7}\right)\frac{pS}{g} = \frac{10}{7} \cdot \frac{pS}{g}$.

Ответ. $m = \frac{10}{7} \cdot \frac{pS}{g}$.

Задача 21

В вертикальном цилиндре, наполовину заполненном водой, под подвижным поршнем заключен воздух. Поршень находится в равновесии, когда давление внутри цилиндра равно утроенному атмосферному давлению. При температуре $t_1 = 6$ °C расстояние между поршнем и поверхностью воды $h = 10$ см. На каком расстоянии H от поверхности воды окажется поршень, если цилиндр нагреть до температуры $t_2 = 100$ °C? Атмосферное давление считать нормальным. Давлением водяных паров при температуре $t_1 = 6$ °C и изменением объема воды за счет испарения пренебречь.



Идея. Используйте свойства водяного пара и условие равновесия поршня.

Указание 1. Из условия равновесия поршня найдите давление газовой смеси под поршнем.

Указание 2. Запишите уравнение состояния сухого воздуха.

Решение. Давление смеси сухого воздуха и насыщенного водяного пара в цилиндре, обусловленное атмосферным давлением p_0 и весом поршня, в процессе нагревания цилиндра остается постоянным и равным $3p_0$. При температуре $t_1 = 6$ °C давление насыщенных паров воды пренебрежимо мало, поэтому давление сухого воздуха $p_{в1} = 3p_0$. При температуре $t_2 = 100$ °C давление насыщенных паров становится равным атмосферному. Следовательно, давление сухого воздуха при этой температуре $p_{в2} = 2p_0$. Из уравнения состояния сухого воздуха следует, что $\frac{3p_0 hS}{T_1} = \frac{2p_0 HS}{T_2}$, где S – площадь поршня. Следовательно, $H = \frac{3h}{2} \cdot \frac{t_2 + 273°\text{C}}{t_1 + 273°\text{C}} \approx 20$ см.

Ответ. $H = \frac{3h}{2} \cdot \frac{t_2 + 273°\text{C}}{t_1 + 273°\text{C}} \approx 20$ см.

Задача 22

В чайник налили воды при температуре $t = 10$ °C и поставили на электроплитку. Через время $\tau_1 = 10$ мин. вода закипела. Через какое время τ_2 вода полностью выкипит? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования

$r = 2{,}3$ МДж/кг. Температура кипения воды $t_к = 100\,°C$. Теплоемкостью чайника и потерями теплоты пренебречь.

Идея. Примените уравнение теплового баланса.

Указание. Найдите количества теплоты, требующиеся для нагревания воды до температуры кипения и для превращения ее в пар.

Решение. Обозначив через m начальную массу воды в чайнике, найдем количества теплоты Q_1 и Q_2, требующиеся соответственно для нагревания воды до температуры кипения и для превращения ее в пар: $Q_1 = cm(t_к - t)$, $Q_2 = mr$. Пусть q – мощность плитки; тогда $Q_1 = q\tau_1$, $Q_2 = q\tau_2$. Объединяя записанные выражения, получаем $\tau_2 = \tau_1 \dfrac{r}{c(t_к - t)} = 60{,}8$ мин.

Ответ. $\tau_2 = \tau_1 \dfrac{r}{c(t_к - t)} = 60{,}8$ мин.

Задача 23

В теплоизолированном сосуде в начальный момент находится одноатомный газ при температуре $T_0 = 300$ К и кусочек железа массой $m = 0{,}2$ кг, нагретый до температуры $T_1 = 500$ К. Начальное давление газа $p_0 = 10^5$ Па, его объем $V_0 = 1000$ см^3, удельная теплоемкость железа $c = 0{,}45$ кДж/(кг·К). Найти давление газа в равновесном состоянии, считая объем газа неизменным.

Идея. Используйте уравнение теплового баланса и закон Шарля.

Указание 1. Найдите установившуюся температуру в сосуде.

Указание 2. Запишите для воздуха закон Шарля.

Решение. Из уравнения теплового баланса имеем $\dfrac{3}{2}\nu RT_0 + mcT_1 = \left(\dfrac{3}{2}\nu R + mc\right)T$, где ν – число молей газа, T – установившаяся (равновесная) температура в сосуде. Число молей газа может быть легко найдено из уравнения его начального состояния: $\nu = p_0V_0/(RT_0)$. Подставляя ν в первое соотношение, находим установившуюся температуру $T = \dfrac{(3p_0V_0 + 2mcT_1)T_0}{3p_0V_0 + 2mcT_0}$. Поскольку объем газа постоянен, его давление в конечном состоянии $p = p_0\dfrac{T}{T_0}$. Объединяя записанные выражения, получаем $p = p_0\dfrac{2mcT_1 + 3p_0V_0}{2mcT_0 + 3p_0V_0} \approx 1{,}67\cdot 10^5$ Па.

Ответ. $p = p_0 \dfrac{2mcT_1 + 3p_0V_0}{2mcT_0 + 3p_0V_0} \approx 1{,}67 \cdot 10^5$ Па.

Задача 24

Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $W = 500$ Вт. При включении нагревателя на время $t_1 = 2$ мин. температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении – понизилась за время $t_2 = 1$ мин. на ту же величину ΔT. Какова масса m нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Идея. Используйте уравнение теплового баланса.

Указание 1. Введите массу воды и мощность потерь. Запишите для процессов нагревания и охлаждения воды уравнение теплового баланса.

Указание 2. Исключите массу воды и мощность потерь.

Решение. Поскольку по условию потери тепла пропорциональны времени, количественной характеристикой потерь является их мощность w. Обозначив через m массу воды, по первому закону термодинамики имеем $Wt_1 = cm\Delta T + wt_1$ (при нагревании воды), $cm\Delta T = wt_2$ (при остывании воды). Исключая отсюда w и m, получаем $m = \dfrac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} \approx 4{,}8$ кг.

Ответ. $m = \dfrac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} \approx 4{,}8$ кг.

Задача 25

В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры $t_1 = 60$ °C. В стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру $t_0 = 20$ °C, а некоторое время спустя – еще два таких же шарика при той же температуре. В результате в стакане устанавливается температура $t_3 = 50$ °C. Какова была установившаяся температура t_2 в стакане после того, как в него был опущен первый шарик? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Идея. Используйте уравнение теплового баланса.

Указание 1. Введите теплоемкости стакана с водой и шарика и запишите уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена, указанных в условии.

Указание 2. Исключите теплоемкости стакана с водой и шарика.

Р е ш е н и е. Пусть $C_в$ и $C_ш$ – теплоемкости стакана с водой и шарика соответственно. Запишем уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена: $C_в(t_1 - t_2) = C_ш(t_2 - t_0)$ (когда положили первый шарик), $C_в(t_2 - t_3) + C_ш(t_2 - t_3) = 2C_ш(t_3 - t_0)$ (когда положили второй и третий шарики). Исключая из этих соотношений $C_в$ и $C_ш$, получаем $t_2 = \dfrac{2t_1(t_3 - t_0) + t_3(t_1 - t_0)}{t_1 + 2t_3 - 3t_0} = 56$ °C.

О т в е т. $t_2 = \dfrac{2t_1(t_3 - t_0) + t_3(t_1 - t_0)}{t_1 + 2t_3 - 3t_0} = 56$ °C.