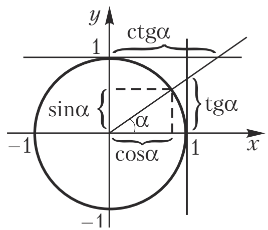
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Соотношения между градусной и радианной мерами углов

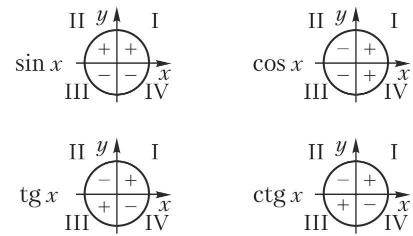
$$2\pi \text{ рад} = 360^\circ;\ 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}017 \text{ рад};\ 1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n}{180} \text{ рад};\quad n \text{ рад} = \frac{180^\circ \cdot n}{\pi}$$

Тригонометрические функции



Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям



Значения тригонометрических функций для некоторых углов

радианы	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
градусы	-180°	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

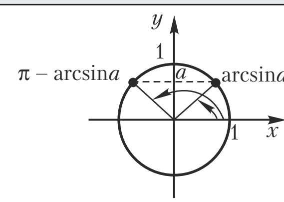
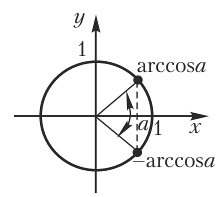
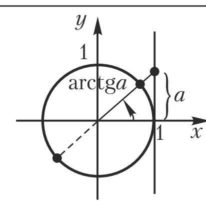
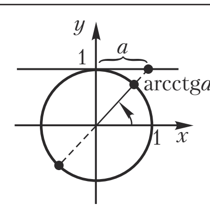
Формулы приведения

	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi n-\alpha$, где $n\in\mathbf{Z}$	$2\pi n+\alpha$, где $n\in\mathbf{Z}$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$
$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$
$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$	Если $a\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Если $\lvert a\rvert>1$, то корней нет.	
$\cos x = a$	Если $a\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Если $\lvert a\rvert>1$, то корней нет.	
$\mathrm{tg}\,x = a$	$x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.	
$\mathrm{ctg}\,x = a$	$x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.	

Некоторые типы тригонометрических уравнений

$\sin x=\sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2\pi n, \\ x=\pi-y+2\pi n, \end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=\cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2\pi n, \\ x=-y+2\pi n, \end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}$
$\mathrm{tg}\,x=\mathrm{tg}\,y \Leftrightarrow x=y+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\mathrm{ctg}\,x=\mathrm{ctg}\,y \Leftrightarrow x=y+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

Основные тригонометрические равенства и схема их взаимосвязей (⊕ — означает «сложить»; ⊖ — «вычесть».)

$3\alpha = 2\alpha + \alpha$
$4\alpha = 2\alpha + 2\alpha$
...

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\mathrm{tg}3\alpha = \dfrac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}3\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$

$+\beta = -(-\beta) \qquad -\beta = +(-\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta = x\\ \alpha+\beta = y\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{x+y}{2}\\ \beta = \dfrac{y-x}{2}\end{array}\right.$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$

$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$

$y \rightarrow (-y)$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin\alpha \pm \sqrt{3}\cos\alpha = 2\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt{3}\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\sin\alpha = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$2\alpha = \alpha + \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$
$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$

$1 = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

Универсальная тригонометрическая подставка

$\sin\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}\\ \sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}\end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Знак перед корнем выбирается по знаку левой части

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Примеры.

1.1. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

1.2. $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: $x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

$x=(-1)^n\left(-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

$x=(-1)^n\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Вид уравнения	Формула корней
2. $\cos x=a$, где $\lvert a\rvert<1,\ a\neq 0$.	$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Примеры.

2.1. $\cos x=\frac{1}{2}$.

Решение: $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.2. $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Решение: $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

$x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

$x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

4. Уравнения вида $\mathrm{tg}x = a$, $\mathrm{ctg}x = a$.

Вид уравнения	Формула корней
3. $\mathrm{tg}x = a$.	$x = \mathrm{arctg}a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Примеры.

3.1. $\mathrm{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение: $x = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

3.2. $\mathrm{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение: $x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Вид уравнения	Формула корней
4. $\mathrm{ctg}x = a$.	$x = \mathrm{arcctg}a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

4.1. $\mathrm{ctg}x = 1$.

Решение: $x = \mathrm{arcctg}1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

4.2. $\mathrm{ctg}x = -1$.

Решение: $x = \mathrm{arcctg}(-1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi - \mathrm{arcctg}1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

1.1. $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7$. Воспользуемся формулами приведения и получим $6\cos^2 x + 5\sin x = 7$.

После применения основного тригонометрического тождества уравнение принимает вид $6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x = 7$;

$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. Пусть $\sin x = t$, тогда $6t^2 - 5t + 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3}, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Выполним обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{3},\\[2mm] \sin x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\\[2mm] x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n;\ (-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

1.2. $2\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=3$. Так как $\mathrm{ctg}x=\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}$, то уравнение имеет вид

$$2\mathrm{tg}x+\frac{1}{\mathrm{tg}x}=3.$$

Пусть $\mathrm{tg}x=t$, тогда $2t+\dfrac{1}{t}=3$; $\begin{cases}2t^2-3t+1=0,\\ t\neq 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t=1,\\[2mm] t=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=1,\\[2mm] \mathrm{tg}x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\\[2mm] x=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi n;\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

2. Метод разложения на множители.

2.1. $\sqrt{3}\sin x=\cos^2 x\sin x;\ \sqrt{3}\sin x-\cos^2 x\sin x=0;$

$\sin x\left(\sqrt{3}-\cos^2 x\right)=0;$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos^2 x=\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности не имеет корней, поскольку $\sqrt{3}>1$. Тогда $\sin x=0;\ x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.2. $\mathrm{tg}x\,\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}x;\ \mathrm{tg}x\,\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}x=0;\ \mathrm{tg}x\left(\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=0;\\ \begin{cases}\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0,\\ \cos x\neq 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\sin x=0;\\ \begin{cases}\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\neq 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\\ \begin{cases}\dfrac{x}{2}=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ \cos x\neq 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}; \\ \begin{cases} x=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}, \\ \cos x\neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Так как $\cos x=0$ при $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, то система не имеет решений.

Таким образом, числа вида $x=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$, являются корнями данного уравнения.

Ответ: $\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

2.3. $\sin 3x-\sin x+2\cos^2 x=1$.

Запишем уравнение в виде $(\sin 3x-\sin x)+(2\cos^2 x-1)=0$.

Применим формулы разности синусов и косинуса двойного угла и получим $2\sin x\cos 2x+\cos 2x=0$; $\cos 2x(2\sin x+1)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ 2\sin x+1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ \sin x=-\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in \mathbf{Z}, \\ x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in \mathbf{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ \ n\in \mathbf{Z}, \\ x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$; $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

3. Однородные уравнения и уравнения, сводящиеся к однородным.

3.1. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$.

Поскольку значения переменной, при которых $\cos x=0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ и получим $\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1=0$; $\operatorname{tg}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

3.2. $\cos^2 x - 7\sin^2 x = 3\sin 2x$. По формуле синуса двойного угла имеем: $\cos^2 x - 7\sin^2 x = 6\sin x \cos x$.

Поскольку значения переменной, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получим $1 - 7\mathrm{tg}^2 x = 6\mathrm{tg}x$; $7\mathrm{tg}^2 x + 6\mathrm{tg}x - 1 = 0$.

Пусть $\mathrm{tg}x = t$, тогда $7t^2 + 6t - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = \dfrac{1}{7}. \end{array}\right.$ То есть $\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = -1, \\ \mathrm{tg}x = \dfrac{1}{7}; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \\ x = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{7} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{7} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3.3. $8\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 3$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим:

$8\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x = 3 \cdot (\sin^2 2x + \cos^2 2x)$;

$5\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 4\cos^2 2x = 0$.

Поскольку значения переменной, при которых $\cos 2x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 2x$ и получим $5\mathrm{tg}^2 2x - \mathrm{tg}2x - 4 = 0$.

Пусть $\mathrm{tg}2x = t$, тогда $5t^2 - t - 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -\dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$

Выполним обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}2x = 1, \\ \mathrm{tg}2x = -\dfrac{4}{5}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \\ 2x = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{4}{5}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}; \\ x = -\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{4}{5} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$; $-\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{4}{5} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Метод вспомогательного аргумента.

4.1. $\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=1$.

Разделим обе части уравнения на 2 и получим уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

Так как $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$ и $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то исходное уравнение принимает вид $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

С помощью формулы косинуса разности получим $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$;

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

4.2. $3\sin x-4\cos x=5$.

Разделим обе части уравнения на 5 и получим уравнение $\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x=1$. Поскольку $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то существует угол φ такой, что $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, а $\sin\varphi=\frac{4}{5}$.

Тогда исходное уравнение принимает вид $\cos\varphi\sin x-\sin\varphi\cos x=1$. По формуле синуса разности получим $\sin(x-\varphi)=1$; $x-\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\varphi+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

5. Специальные замены.

$15\sin x-\sin 2x=15+15\cos x$.

$15\sin x-\sin 2x=15+15\cos x$; $15\sin x-15\cos x-\sin 2x=15$;

$15(\sin x-\cos x)-2\sin x\cos x=15$. Пусть $\sin x-\cos x=t$, тогда $(\sin x-\cos x)^2=t^2$; $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$; $1-2\sin x\cos x=t^2$; $-2\sin x\cos x=t^2-1$.

Исходное уравнение принимает вид

$$15t+t^2-1=15;\ t^2+15t-16=0;\ \left[\begin{array}{l}t=-16,\\ t=1.\end{array}\right.$$

То есть $\left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=-16,\\ \sin x-\cos x=1.\end{array}\right.$ Первое уравнение совокупности не имеет корней.

Решим уравнение $\sin x-\cos x=1$. Умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и получим $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.