2. РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

2.1. Охарактеризуйте движение тел, графики скоростей которых представлены на рис. 2.1.

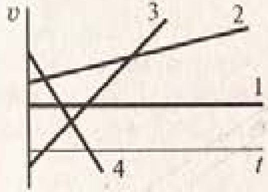


Рис. 2.1

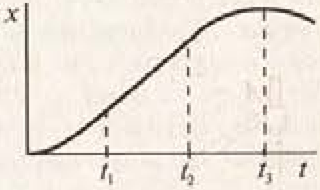


Рис. 2.2

Решение. 1) Равномерное; 2), 3) равноускоренное; 4) равнозамедленное.

2.2. По графику зависимости координаты тела от времени (рис. 2.2) построить графики зависимости ускорения, скорости и пути, пройденного телом, от времени.

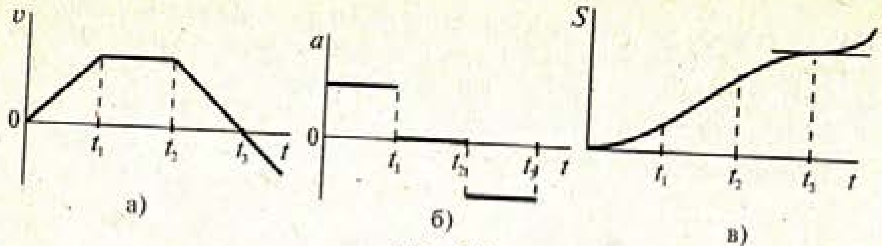


Рис. 2.3

Решение приведено на рис. 2.3в. В момент времени t_3 — точка перегиба.

2.3. График зависимости скорости тела от времени дан на рис. 2.4. Начальная координата $x_0 = 0$. Постройте графики зависимости ускорения, координаты и пути, пройденного телом, от времени.

Решение. На рис. 2.5б в интервале $0—t_3$ — три отрезка парабол. В точке t_3 для $S(t)$ — точка перегиба; зависимость $a(t)$ — рис. 2.5а.

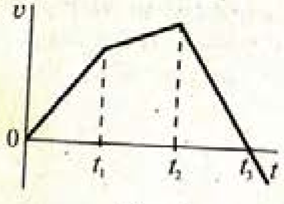


Рис. 2.4

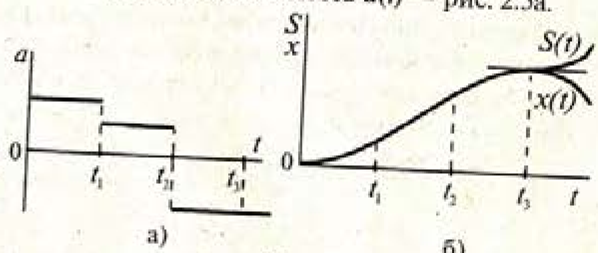


Рис. 2.5

2.4. На рис. 2.6а дан график зависимости скорости материальной точки от времени. Постройте графики зависимости ускорения, перемещения и пройденного пути этой материальной точки от времени.

Решение. Графики приведены на рис. 2.6 (б, в). От $t = 0$ до t_4 зависимость координаты и перемещения от времени совпадают, в интервале от $t = 0$ до t_2 — два отрезка парабол, $t_2—t_3$ — отрезок прямой, от t_3 и дальше — отрезки парабол. Кривая $S(t)$ в моменты t_4 и t_6 имеет точки перегиба.

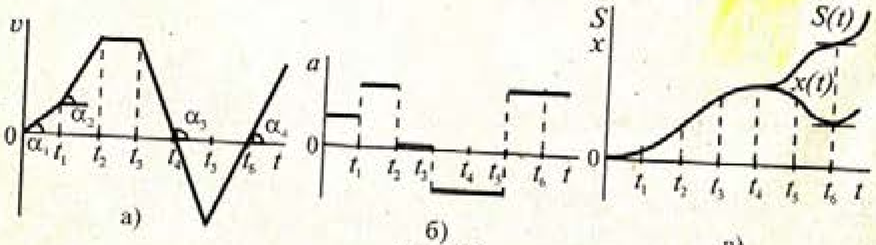


Рис. 2.6

2.5. Графики скоростей точки представлены на рис. 2.7. Постройте графики перемещения, путей и ускорений точки, если в начальный момент времени она находится в начале координат.

Решение самостоятельное.

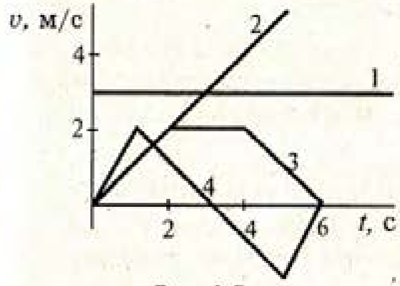


Рис. 2.7

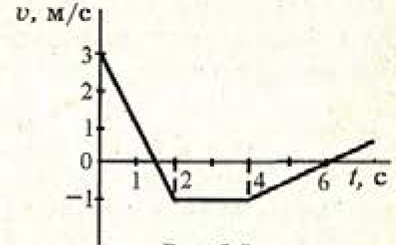
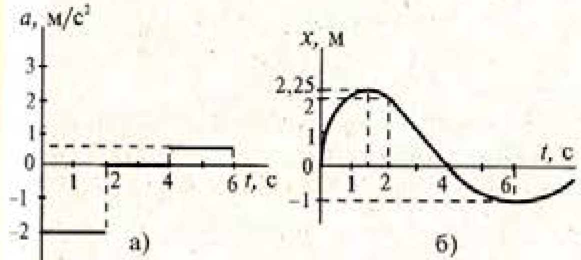


Рис. 2.8

2.6. Дан график зависимости скорости тела от времени (рис. 2.8). Постройте графики зависимости пути и координаты от времени. Определите среднюю скорость за первые 2,0 и 5,0 с. Начальная координата $x_0 = 0$.

Ответ: $v_2 = 1$ м/с; $v_5 = -0{,}15$ м/с.



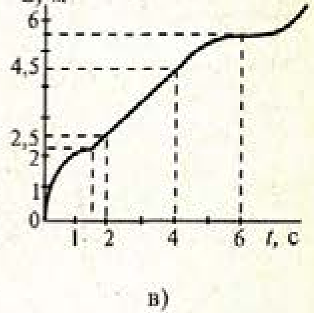


Рис. 2.9

Решение. Рис. 2.9а:

$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t_1} = \frac{-1-3}{2} = -2{,}0\,\text{м/с}^2;\quad 0 < t < 2\,\text{с};$$

$$a_2 = 0;\ 2\,\text{с} < t < 4\,\text{с};$$

$$a_3 = \frac{0-(-1)}{2} = 0{,}5\,\text{м/с}^2;\quad 4\,\text{с} < t < 6\,\text{с};$$

Рис. 2.9б: $x(t)$ — парабола; $0 < t < 1{,}5\,\text{с}$; $x(t) = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$;

$$x(1{,}5\,\text{с}) = 3\cdot 1{,}5 - \frac{2\cdot 1{,}5^2}{2} = 2{,}25\,\text{м};$$

при $t = 1{,}5\,с$ — вершина параболы, $\upsilon(1{,}5\,с) = 0$;
$1{,}5\,с < t < 2\,с$ — участок параболы; $x(2\,с) = 2\,м$;
$2\,с < t < 4\,с$ — отрезок прямой (равномерное движение);
$t = 4\,с$, $x(4\,с) = 0$;
$4\,с < t < 6\,с$ — часть параболы, $x(6\,с) = -1\,м$ — вершина параболы.

Рис. 2.9в: Точки $t = 1{,}5\,с$ и $t = 6\,с$ — точки перегиба кривой $S(t)$. Средняя скорость находится как алгебраическая сумма площадей под кривой скорости, деленная на интервал времени.

За 2 с: $\upsilon_2 = \left(\dfrac{3 \cdot 1{,}5}{2} - \dfrac{(2-1{,}5) \cdot 1}{2}\right) м \cdot \dfrac{1}{2\,с} = 1\,м/с$;

За 5 с: $\upsilon_5 = \left(\dfrac{3 \cdot 1{,}5}{2} - \dfrac{0{,}5 \cdot 1}{2} - 2 \cdot 1 - \dfrac{(1+0{,}5) \cdot 1}{2}\right) м \cdot \dfrac{1}{5\,с} = -0{,}15\,м/с$.

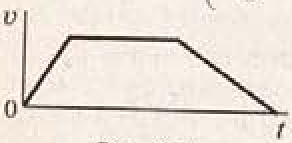


Рис. 2.10

2.7. По заданному графику скорости (рис. 2.10) постройте графики ускорения и пути.

Решение самостоятельное.

2.8. По графику перемещения, изображенному на рис. 2.11а, постройте графики скорости, ускорения и пути (два участка парабол).

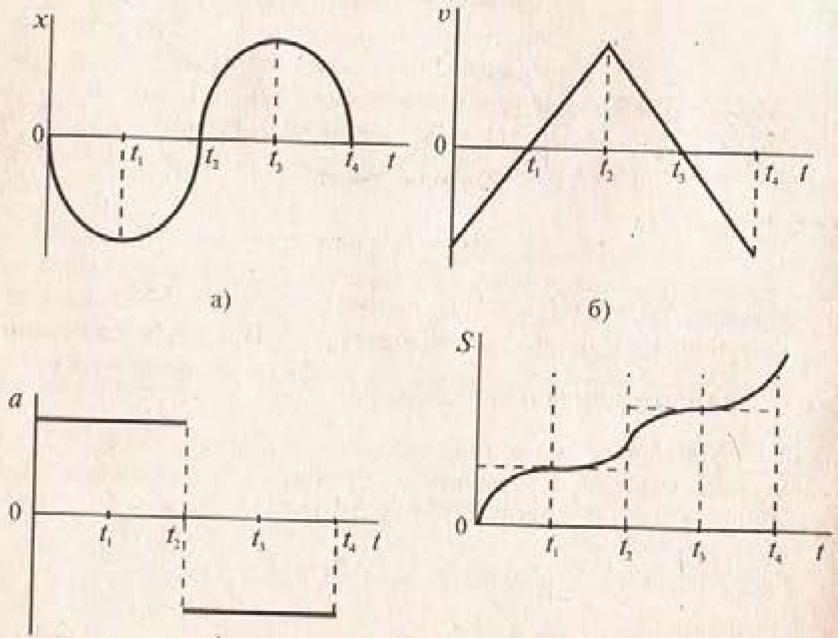


Рис. 2.11

Решение. Графики приведены на рис. 2.11б, 2.11в, 2.11г. Движение равнозамедленное, если знаки у скорости и ускорения разные; если они одинаковые, то движение равноускоренное.

2.9 По графику ускорения, приведенному на рис. 2.12а, постройте графики скорости, перемещения и пути при начальных условиях: $\upsilon_0 = 0$; $x_0 = 0$. Как изменятся эти графики, если начальные условия станут следующими:

1) $x(0) = x_0$; $\upsilon_0 = 0$; 2) $x_0 = 0$; $\upsilon(0) = \upsilon_0$; 3) $x_0 = 0$; $\upsilon(0) = -\upsilon_0$?

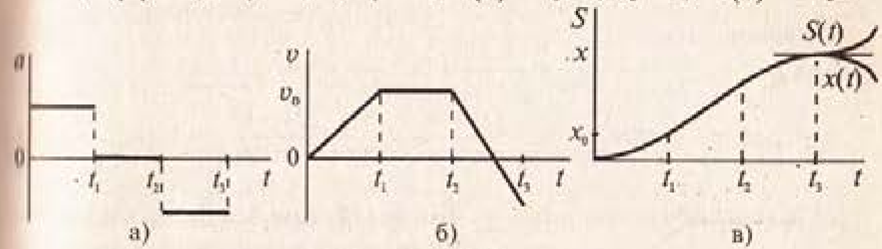


Рис. 2.12

Решение. Графики $\upsilon(t)$, $x(t)$ и $S(t)$ показаны на рис. 2.12б, 2.12в. Пункты 1), 2), 3) выполните самостоятельно.

2.10. Тело движется по прямой с ускорением $a = 0{,}5\,м/с^2$. Начальная скорость тела $\upsilon_0 = -5{,}0\,м/с$, начальная координата $x_0 = 2{,}0\,м$. Запишите уравнение движения тела, зависимость скорости от времени. Определите время движения тела до остановки и путь, пройденный телом до остановки.

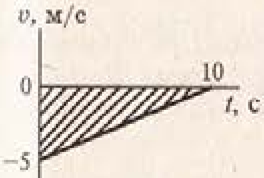


Рис. 2.13

Ответ: $t = 10\,с$; $S = 25\,м$.

Решение. Уравнение движения

$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$x(t) = 2 - 5t + 0{,}25t^2$; $\upsilon(t) = \upsilon_0 + at$; $\upsilon(t) = -5 + 0{,}5t$;

Остановка $\upsilon(t_1) = 0$; $-5 + 0{,}5t_1 = 0$; $t_1 = 10\,с$. Путь до остановки — заштрихованная площадь на рис. 2.13: $S = \dfrac{5 \cdot 10}{2} = 25\,м$.

2.11. Уравнение движения тела вдоль оси x: $x = 2 + 3t - t^2$, где x измеряется в метрах, t — в секундах. В момент $t = 3\,с$ найдите: а) положение тела, б) его скорость и в) ускорение.

Ответ: $x = 2\,м$; $\upsilon = -3\,м/с$; $a = -2\,м/с^2$.

Решение. $x = 2 + 3t - t^2$; $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = 3 - 2t$; $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = -2\,м/с^2$.

При $t = 3\,с$ а) $x = 2 + 9 - 9 = 2\,м$;

б) $\upsilon = 3 - 6 = -3$ м/с;

в) $a = -2$ м/с^2.

2.12. Частица движется вдоль оси x по закону $x = 3t^2 - 2t + 3$. Определите: а) среднюю скорость $2\,\text{с} < t < 3\,\text{с}$; б) мгновенную скорость при $t_1 = 2$ с и $t_2 = 3$ с; в) среднее ускорение в интервале $2\,\text{с} < t < 3\,\text{с}$; г) мгновенное ускорение при $t_1 = 2$ с и $t_2 = 3$ с.

Решение. При $t_1 = 2$ с, $x_1 = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 3 = 11$ м, при $t_2 = 3$ с, $x_2 = 24$ м.

а) Средняя скорость $\upsilon_{ср} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{24 - 11}{3 - 2} = 13$ м/с;

б) Мгновенная скорость $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = 6t - 2$; при $t_1 = 2$ с, $\upsilon_1 = 10$ м/с; при $t_2 = 3$ с, $\upsilon_2 = 16$ м/с.

в) Среднее ускорение $a_{ср} = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{16 - 10}{3 - 2} = 6$ м/с^2.

г) Мгновенное ускорение $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 6$ м/с^2 — постоянная величина и при $t_1 = 2$ с, и при $t_2 = 3$ с.

2.13. Прямолинейное движение точки описывается уравнением $x = 1 + 3t - 2t^2$ (x выражено в м, t — в с). Где находилась точка в начальный момент времени? Как меняется скорость со временем? Когда точка окажется в начале координат?

Ответ: $t_1 = 0{,}5$ с, $t_2 = 1$ с.

Решение. $x(t) = 1 + 3t - 2t^2$; $t = 0$, $x_0 = 1$ м; $\upsilon(t) = \dfrac{dx}{dt} = 3 - 4t$;

$x = 0$, $1 + 3t - 2t^2 = 0$. $t_1 = 0{,}5$ с, $t_2 = 1$ с — в эти моменты точка находится в начале координат.

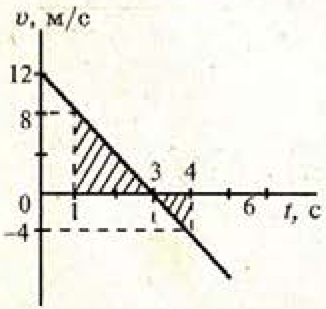


Рис. 2.14

2.14. Движение точки задано уравнением $x = 12t - 2t^2$ (x выражено в м, t — в с). Определите среднюю скорость и среднюю путевую скорость движения точки в интервале времени от $t_1 = 1{,}0$ с до $t_2 = 4{,}0$ с.

Ответ: $\upsilon_{ср} = 2$ м/с, $\upsilon_{Sср} = 3{,}3$ м/с.

Решение. $x = 12t - 2t^2$;

$\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = 12 - 4t$ (рис. 2.14).

$t_0 = 0$; $\upsilon(0) = 12$ м/с; $\upsilon(t') = 0$; $12 - 4t' = 0$; $t' = 3$ с;

$\upsilon(t_1) = 12 - 4\cdot 1 = 8$ м/с; $\upsilon(t_2) = 12 - 4\cdot 4 = -4$ м/с;

Средняя скорость $\upsilon_{ср} = \left(\dfrac{8\cdot(3-1)}{2} - \dfrac{4\cdot(4-3)}{2}\right)\dfrac{1}{(4-1)} = 2$ м/с;

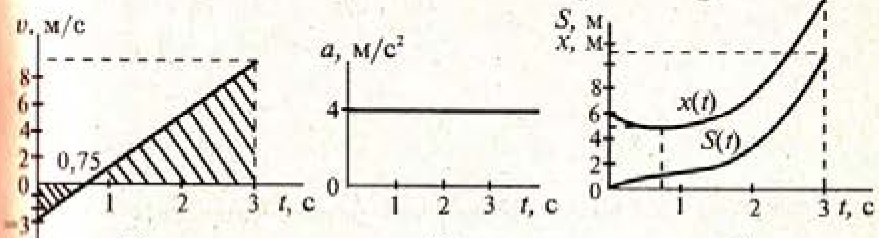
Средняя путевая скорость $\upsilon_{Sср} = \dfrac{S}{t}$;

$\upsilon_{Sср} = \left(\dfrac{8\cdot(3-1)}{2} + \dfrac{4\cdot(4-3)}{2}\right)\dfrac{1}{(4-1)} = 3{,}3$ м/с.

2.15. Тело движется вдоль оси x по закону $x = 6 - 3t + 2t^2$. Найдите среднюю путевую скорость тела, ускорение и путь за первые три секунды движения. Постройте графики скорости, ускорения, перемещения и пути в зависимости от времени.

Решение. По определению $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = -3 + 4t$, тогда при $t_1 = 0$ $\upsilon_1 = -3$ м/с, при $t_2 = 3$ с $\upsilon_2 = 9$ м/с. $\upsilon = 0$, когда $t = 0{,}75$ с.

Учитывая, что средняя путевая скорость $\upsilon_{Sср} = \dfrac{S}{t_1}$, по графику скорости, изображенному на рис. 2.15а, найдем путь тела за 3 с (заштрихованная площадь на рисунке) $S = \dfrac{|3\cdot 0{,}75|}{2} + \dfrac{|9\cdot 2{,}25|}{2} = 11{,}25$ м.



а) б) в)

Рис. 2.15

Средняя путевая скорость за 3 с $\upsilon_{Sср} = \dfrac{11{,}25}{3} = 3{,}75$ м/с.

Ускорение тела: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 4$ м/с^2 = *const* (см. рис. 2.15б).

График перемещения — парабола (см. рис. 2.15в), где при $t = 0$ $x_0 = 6$ м — начальная координата тела, вершина параболы находится в точке $t = 0{,}75$ с ($\upsilon = 0$), $x(t = 0{,}75\,\text{с}) = 6 - 3\cdot 0{,}75 + 2\cdot 0{,}75^2 = 4{,}9$ м.

В момент времени $t_2 = 3$ с, $x(t_2 = 3\,\text{с}) = 6 - 3\cdot 3 + 2\cdot 3^2 = 15$ м.

Следует учитывать, что путь — это всегда положительная величина, которая не может уменьшаться, поэтому, чтобы получить $S(t)$, на графике $x(t)$ следует часть параболы за время от 0 до 0,75 с перевернуть выпуклостью вверх, а оставшуюся часть параболы ($t > 0{,}75$ с) перенести параллельно самой себе и присоединить к графику $S(t)$.

2.16. Точка движется по закону $x = 2 - 12t + 2t^2$ (x выражено в м, t — в с). Постройте графики зависимостей координаты, пути, скорости и ускорения точки от времени.

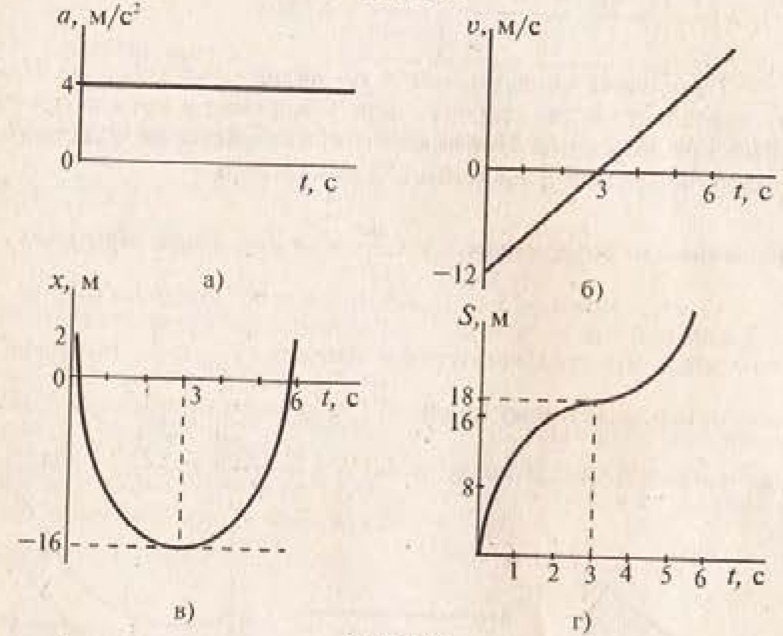


Рис. 2.16

Решение. Графики показаны на рис. 2.16. $x = 2 - 12t + 2t^2$;

$\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = -12 + 4t$; $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 4\,\text{м/с}^2$; $\upsilon = -12 + 4t$; $\upsilon(0) = -12\,\text{м/с}$;

$\upsilon(t_1) = 0$; $-12 + 4t_1 = 0$; $t_1 = 3$ с;

В точке $t_1 = 3$ с при $\upsilon = 0$ — вершина параболы (рис. 2.16в)

$x(t_1) = 2 - 12\cdot 3 + 2\cdot 3^2 = -16$ м; $x = 0{,}2t^2 - 12t + 2 = 0$;

$t_2 = 0{,}2$ с; $t_3 = 5{,}8$ с.

2.17. Траектория движения тела показана на рис. 2.17. Уравнение движения тела вдоль оси y записывается в следующем виде: $y = \dfrac{a_y t^2}{2}$, где $a_y = 2{,}0\,\text{м/с}^2$. Угол $\alpha = 30°$. Определите ускорение тела. Какую скорость имеет тело через $t = 5{,}0$ с после начала движения, каковы его координаты в этот момент времени?

Ответ: $a = 4\,\text{м/с}^2$, $\upsilon = 20\,\text{м/с}$, $x = 43$ м, $y = 25$ м.

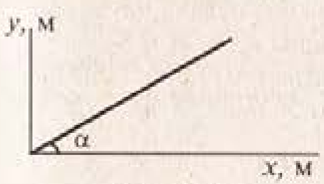


Рис. 2.17

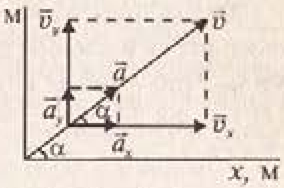


Рис. 2.18

Решение. $a_y = 2{,}0\,\text{м/с}^2$; $a_x = a_y \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 2\cdot\operatorname{ctg}30° = 3{,}46\,\text{м/с}^2$;

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; $a = \sqrt{3{,}46^2 + 2^2} = 4\,\text{м/с}^2$ (рис. 2.18);

$\upsilon_x = a_x t$; $\upsilon_y = a_y t$; $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$; $\upsilon = t\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; $\upsilon = 20\,\text{м/с}$;

или $\upsilon = at$; $\upsilon = 4\cdot 5 = 20\,\text{м/с}$.

$x = \dfrac{a_x t^2}{2}$; $x = \dfrac{3{,}46\cdot 5^2}{2} \approx 43$ м; $y = \dfrac{a_y t^2}{2}$; $y = \dfrac{2\cdot 5^2}{2} = 25$ м.

2.18. Жюль Верн предложил запустить капсулу с человеком на Луну, выстрелив ее из пушки, длина ствола которой $l = 220$ м. При этом капсула приобретает скорость $\upsilon = 10{,}97$ км/с. Каково ускорение капсулы во время движения? Сравните полученную величину с ускорением свободного падения.

Ответ: $a = 2{,}74\cdot 10^5\,\text{м/с}^2$.

Решение. Из формулы $l = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$ получаем $a = \left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2\right)/2l$;

$\upsilon_0 = 0$, тогда $a = 2{,}74\cdot 10^5\,\text{м/с}^2$, что в $2{,}79\cdot 10^4$ раз больше ускорения свободного падения ($g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$), что является нереальным.

2.19. Точка проходит путь 1 м, имея начальную скорость 1 мм/с и конечную — 2 мм/с. Может ли ее среднее ускорение равняться 10 км/с²?

Решение. Среднее ускорение равно $a_{\text{ср}} = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$, поэтому требование задачи можно удовлетворить при $t = \dfrac{2\cdot 10^{-3} - 1\cdot 10^{-3}}{10^4} = 10^{-7}$ с, тогда средняя скорость точки будет равна $v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{1}{10^{-7}} = 10^7$ м/с = $= 10^4$ км/с.

Здесь учтено, что рассматриваемое движение не должно быть обязательно равноускоренным.

2.20. Автомобиль начинает движение без начальной скорости и проходит первый километр с ускорением a_1, а второй — с ускорением a_2. При этом на первом километре его скорость возрастает на 10 м/с, а на втором — на 5 м/с. Что больше: a_1 или a_2?

Ответ: $a_2 > a_1$.

Решение. $v^2 - v_0^2 = 2aS$; $a_1 = \frac{10^2 - 0}{2 \cdot 10^3} = 0{,}05\ \text{м/с}^2$;

$a_2 = \frac{(10+5)^2 - 10^2}{2 \cdot 10^3} = 0{,}0625\ \text{м/с}^2$; $a_2 > a_1$.

2.21. Автомобиль начал двигаться с ускорением $a = 1{,}5$ м/с² и через некоторое время оказался на расстоянии $S = 12$ м от начальной точки. Определите скорость автомобиля в этот момент времени. Чему равна средняя скорость?

Ответ: $v = 6{,}0$ м/с; $v_{ср} = 3$ м/с.

Решение. $S = \frac{at^2}{2}$; $t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12}{1{,}5}} = 4\ \text{с}$; $v = at = 1{,}5 \cdot 4 = 6\ \text{м/с}$;

$v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{12}{4} = 3\ \text{м/с}$.

2.22. По одному направлению из одной точки одновременно начали двигаться два тела: одно — равномерно со скоростью $v = 980$ см/с, а другое — равноускоренно без начальной скорости с ускорением $a = 9{,}8$ см/с². Через какое время второе тело догонит первое?

Ответ: $\tau = 200$ с.

Решение. $S_1 = S_2$; $v \cdot \tau = \frac{a\tau^2}{2}$; $\tau = \frac{2v}{a} = \frac{2 \cdot 0{,}980}{0{,}098} = 200\ \text{с}$.

2.23. Автомобиль прошел путь $S = 60$ км за время $t = 52$ мин. Сначала он шел с ускорением $+a$ в конце — с ускорением $-a$, а остальное время с максимальной скоростью $v_{max} = 72$ км/ч. Найдите модуль ускорения, если начальная и конечная скорости равны нулю.

Ответ: $a = 0{,}17$ м/с².

Решение. $t_1 = t_3$; $t_2 = t - 2t_1$; $S = \frac{v_{max}}{2} 2t_1 + v_{max}(t - 2t_1)$;

$t_1 = \frac{v_{max} t - S}{v_{max}}$, $v_{max} = at_1$; $a = \frac{v_{max}}{t_1} = \frac{v_{max}^2}{v_{max} t - S}$.

2.24. Тележка трогается с места и с ускорением 1 м/с² проходит расстояние 12,5 м; затем она движется равномерно в течение 15 с; потом до остановки равнозамедленно проходит 20 м. Найдите скорость и путь равномерного движения, время и ускорение замедленного движения. Постройте график скорости тела.

Решение. Разобьем путь тележки на участки равноускоренного, равномерного и равнозамедленного движения. Начальная скорость на первом участке и конечная на третьем равны нулю. Конечная скорость на первом участке равняется скорости движения на втором участке и начальной скорости на третьем. Используя эти данные, получаем:

$v_2^2 = 2a_1 l_1$; $v_2 = \sqrt{2a_1 l_1} = 5\ \text{м/с}$. $l_2 = v_2 t_2 = \sqrt{2a_1 l_1} \cdot t_2 = 75\ \text{м}$.

$0 - v_2^2 = 2a_3 l_3$; $a_3 = -v_2^2/2l_3 = -0{,}625\ \text{м/с}^2$. $t_3 = (0 - v_2)/a_3 = 8\ \text{с}$.

Время ускоренного движения: $t_1 = v_2/a_1 = \sqrt{2a_1 l_1}/a_1 = 5\ \text{с}$.

График скорости тела представлен на рисунке 2.19.

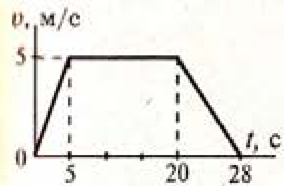


Рис. 2.19

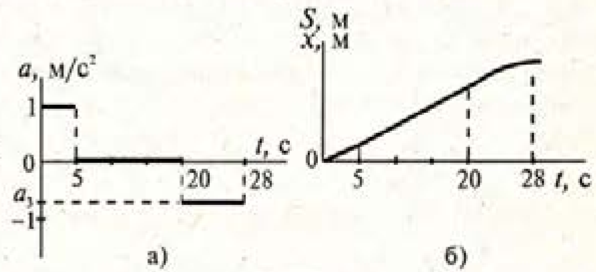


Рис. 2.20

Ускорение тележки на первом участке $a_1 = 1$ м/с, на втором $a_2 = 0$, на третьем $a_3 = -5/8 = -0{,}625$ м/с.

Качественные графики перемещения и пути приведены на рисунке 2.20а, 2.20б.

На участке $t = 0$—5 с график перемещения — парабола, на участке $t = 5$—20 с зависимость $x(t)$ оказывается прямопропорциональной, в интервале $t = 20$—28 с парабола — движение равнозамедленное.

В этой задаче графики перемещения и пути совпадают.

2.25. Расстояние между двумя станциями $S = 3$ км поезд метро проходит со средней скоростью $v_{ср} = 54$ км/ч. При этом на разгон он затрачивает время $t_1 = 20$ с, затем идет равномерно некоторое время t_2 и на замедление до полной остановки тратит $t_3 = 10$ с.

Постройте график скорости движения поезда и определите наибольшую скорость поезда.

Ответ: $\upsilon_{max} = 16{,}2$ м/с (см. рис. 2.21).

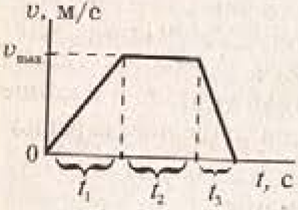


Рис. 2.21

Решение. $t = t_1 + t_2 + t_3 = \dfrac{S}{\upsilon_{ср}}$;

На участке t_1 $\upsilon_{ср} = \dfrac{\upsilon_{max}}{2}$;

На участке t_3 $\upsilon_{ср} = \dfrac{\upsilon_{max}}{2}$;

$$\frac{\upsilon_{max}}{2} t_1 + \upsilon_{max}\left(\frac{S}{\upsilon_{ср}} - (t_1 + t_3)\right) + \frac{\upsilon_{max}}{2} t_3 = S;$$

$$\upsilon_{max} = \frac{2S\upsilon_{ср}}{2S - \upsilon_{ср}(t_1 + t_3)} = 16{,}2 \text{ м/с}.$$