СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Признаки делимости	
На 2	Последняя цифра числа делится на 2
На 3	Сумма цифр числа делится на 3
На 4	Число, записанное двумя последними цифрами числа, делится на 4
На 5	Последняя цифра числа делится на 5
На 9	Сумма цифр числа делится на 9
На 10	Последняя цифра числа 0
На 25	Число, записанное двумя последними цифрами числа, делится на 25

НОД (a, b, c)	Наибольший из общих делителей натуральных чисел a, b и c
НОК (a, b, c)	Наименьшее положительное из общих кратных натуральных чисел a, b и c
НОД $(a, b) \le a$; НОД $(a, b) \le b$ НОК $(a, b) \ge a$; НОК $(a, b) \ge b$ НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = a \cdot b$	

Единицы измерения		
Длина	**Масса**	**Площадь**
1 километр (км) = 1000 м = 100 000 см	1 тонна (т) = 1000 кг	1 квадратный километр = 100 га = 10^6 м^2
1 метр (м) = 100 см = 1000 мм = 10^{-3} км	1 центнер (ц) = 100 кг = 10^{-1} т	1 гектар = 10 000 м^2 = 0,01 км^2
1 дециметр (дм) = 10 см = 10^{-1} м	1 килограмм (кг) = 1000 г = 10^{-3} т	1 ар = 1 сотка = 100 м^2 = 0,01 га^2
1 сантиметр (см) = 10 мм = 10^{-2} м	1 грамм (г) = 10^{-3} кг	1 квадратный метр = 10^{-4} га = 10^4 см^2
1 миллиметр (мм) = 10^{-1} см = 10^{-3} м	1 миллиграмм (мг) = 10^{-3} г = 10^{-6} кг	1 квадратный метр = 10^{-4} га = 10^4 см^2
		1 квадратный сантиметр = 10^{-4} м^2

АЛГЕБРА

Числовые множества

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество ***натуральных*** чисел.

$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество ***целых*** чисел.

$\mathbf{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$ — множество ***рациональных*** чисел (состоит из конечных десятичных дробей и бесконечных периодических десятичных дробей).

Иррациональные числа — множество бесконечных непериодических десятичных дробей.

R — множество ***действительных*** чисел есть объединение множеств рациональных и иррациональных чисел.

Модуль действительного числа		
Определение	**Основные свойства модуля**	
$\lvert a\rvert = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0; \\ -a, \text{ если } a \le 0. \end{cases}$	$\lvert a\rvert \ge 0$; $\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$; $\lvert a\rvert \ge a$; $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$;	$\left\lvert\dfrac{a}{b}\right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$, $b \ne 0$; $\lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$; $\lvert a\rvert^2 = a^2 = \lvert a^2\rvert$.

Некоторые типы уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля	
При $a \ge 0$ $\lvert f(x)\rvert = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$ При $a<0$ $\lvert f(x)\rvert = a$ корней не имеет.	$\lvert f(x)\rvert < a \Leftrightarrow -a<f(x)<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<a, \\ f(x)>-a. \end{cases}$ $\lvert f(x)\rvert > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>a, \\ f(x)<-a. \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$ — 1-й способ; $\lvert f(x)\rvert = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\le 0, \\ -f(x)=g(x) \end{cases} \end{array}\right.$ — 2-й способ.	$\lvert f(x)\rvert > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.$ $\lvert f(x)\rvert < g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x). \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$	$\lvert f(x)\rvert > \lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2 \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0.$

Степени и корни	
$a^1=a,\ a\in\mathbf{R};$ $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}},\ n\in\mathbf{N},\ a\in\mathbf{R};$ $a^0=1,\ a\ne 0,\ a\in\mathbf{R};$	$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n},\ n\in\mathbf{N},\ a\ne 0,\ a\in\mathbf{R};$ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N},\ n\ne 1,$ если $m\le 0$, то $a>0,\ a\in\mathbf{R};$ если $m>0$, то $a\ge 0,\ a\in\mathbf{R}.$

Свойства степеней (при допустимых значениях переменных)	
$a^p\cdot a^r=a^{p+r};$ $a^p:a^r=a^{p-r};$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-r}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^r;$	$a^r\cdot b^r=(ab)^r;$ $\dfrac{a^r}{b^r}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^r;$ $(a^p)^r=a^{pr}.$

Арифметический квадратный корень: $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b\ge 0$ и $b^2=a$ $(a\ge 0)$		
Тождества	**Основные свойства**	
$(\sqrt{a})^2=a,\ a\ge 0,\ a\in\mathbf{R};$ $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert,\ a\in\mathbf{R}.$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b};$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}};$ $(\sqrt{a})^p=\sqrt{a^p};$	$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert};$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{\lvert a\rvert}}{\sqrt{\lvert b\rvert}};$ $\sqrt{a^p}=\left(\sqrt{\lvert a\rvert}\right)^p.$

Вынесение множителя из-под знака корня	**Внесение множителя под знак корня**
$\sqrt{a^2b}=\lvert a\rvert\cdot\sqrt{b}$	$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & \text{если } a\ge 0, \\ -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a\le 0.\end{cases}$

Корни n-й степени: $\sqrt[n]{a}$, $n\in\mathbf{N}$, $n\ne 1$	
Корни четной степени	**Корни нечетной степени**
$\left.\begin{matrix}\sqrt[2n]{a}=b\\ n\in\mathbf{N}, a\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow b\ge 0,\ b^{2n}=a.$ Корень четной степени из отрицательного числа не определен. $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$, при $a\ge 0$. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert$, $a\in\mathbf{R}$.	$\left.\begin{matrix}\sqrt[2n+1]{a}=b\\ n\in\mathbf{N}, a\in\mathbf{R}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow b^{2n+1}=a.$ $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$ при $a\in\mathbf{R}$. $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1}=a$ при $a\in\mathbf{R}$. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$ при $a\in\mathbf{R}$.

Некоторые типы иррациональных уравнений и неравенств	
При $a\ge 0$ $\sqrt{f(x)}=a\Leftrightarrow f(x)=a^2$. При $a<0$ $\sqrt{f(x)}=a$ корней не имеет.	$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\\ f(x)<(g(x))^2.\end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)=(g(x))^2.\end{cases}$	$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)>(g(x))^2.\end{cases}\end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\ (\text{или } f(x)\ge 0),\\ f(x)=g(x).\end{cases}$	$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow 0\le f(x)<g(x)$.

Формулы сокращенного умножения	
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$; $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

Решение квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\ne 0$

1) *Вычислим дискриминант* $D=b^2-4ac$;

2) *если* $D>0$, *то* $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; *если* $D=0$, *то* $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$; *если* $D<0$, *то корней нет.*

Теоремы о квадратных уравнениях

Если коэффициент при x ***в квадратном уравнении четный***, *то есть уравнение имеет вид* $ax^2+2px+c=0$, ***то можно находить корни по формуле*** $x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{D/4}}{a}$ ***при*** $D/4=p^2-ac\ge 0$.

Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, $a\ne 0$ **имеет корни** x_1 и x_2, **то** $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, то $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета. Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}$ и $t_1\cdot t_2=\dfrac{c}{a}$, то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Прогрессии			
	Арифметическая прогрессия $a_{n+1}=a_n+d$, d — разность прогрессии	Геометрическая прогрессия $b_{n+1}=b_n\cdot q$, q — знаменатель прогрессии	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия
Допустимые значения	a_1 и d любые	$b_1\neq 0,\ q\neq 0$	$b_1\neq 0,\ 0<\lvert q\rvert<1$
Формула n-го члена	$a_n=a_1+(n-1)d$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$	
Свойства	$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$; $a_n=\dfrac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$	$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$; $b_n^2=b_{n-k}\cdot b_{n+k}$	
Формула суммы n первых членов	$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$	Если $q\neq 1$, то $S_n=\dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$. Если $q=1$, то $S_n=n\cdot b_1$	Сумма всех членов $S=\dfrac{b_1}{1-q}$

Важные неравенства
$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$; ($a\geq 0$, $b\geq 0$) Среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического; равенство выполняется только при $a=b$.
$Ax+\dfrac{B}{x}\geq 2\sqrt{AB}$ при $A\geq 0,\ B\geq 0,\ x>0$
$\left\lvert a+\dfrac{1}{a}\right\rvert\geq 2$; $(a\neq 0)$ $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ при $a>0$; равенство выполняется при $a=1$. $a+\dfrac{1}{a}\leq -2$ при $a<0$; равенство выполняется при $a=-1$.
$a^2+b^2\geq 2ab$; (a и b — любые). Равенство выполняется при $a=b$.

Логарифмы

Определение: $\log_a b$ $(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$ — показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

$a^{\log_a b}=b$ — ***основное логарифмическое тождество.***

Десятичные логарифмы — логарифмы по основанию 10: $\lg b=\log_{10} b$.

Натуральные логарифмы — логарифмы по основанию e: $\ln b=\log_e b$, где $e=2{,}718281828459045...$ — иррациональное число.

Свойства логарифмов

$a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0,\ m\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{R},\ n\neq 0,\ c>0,\ c\neq 1$

$\log_a 1=0$	$\log_{a^n} x^m=\dfrac{m}{n}\log_a x$	$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$	$\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$
$\log_a a=1$	$\log_a x^m=m\log_a x$; $\log_{a^n} x=\dfrac{1}{n}\log_a x$	$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$	$\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$
$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$		$a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}$	
$\log_a b>0$, если $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$		$\log_a b<0$, если $a>1$ и $0<b<1$ или $b>1$ и $0<a<1$	

Простейшие логарифмические уравнения и неравенства	
$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x > 0 \text{(или } y > 0\text{)} \end{cases}$	Если $\log_a x < \log_a y$ и $a > 1$, то $0 < x < y$.
	Если $\log_a x < \log_a y$ и $0 < a < 1$, то $x > y > 0$.
$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) < 0$ при всех допустимых значениях переменной и $a > 0$, $a \neq 1$	

Простейшие показательные уравнения и неравенства	
Если $a^x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, то $x = y$.	Если $a^x < a^y$ и $a > 0$, то $x < y$.
	Если $a^x < a^y$ и $0 < a < 1$, то $x > y$.
$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) < 0$, если $a > 0$, $a \neq 1$	

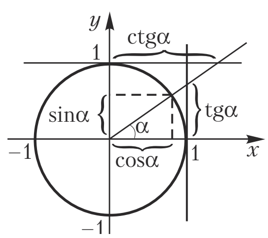
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Соотношения между градусной и радианной мерами углов

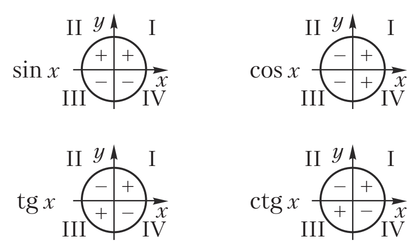
2π рад $= 360°$; $1° = \dfrac{\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}017$ рад; 1 рад $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

$n° = \dfrac{\pi \cdot n}{180}$ рад; n рад $= \dfrac{180° \cdot n}{\pi}$

Тригонометрические функции



Знаки тригонометрических функций
по координатным четвертям

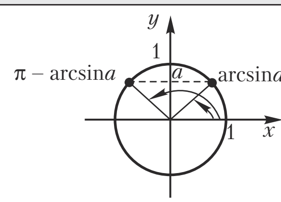
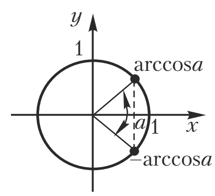
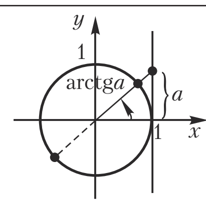
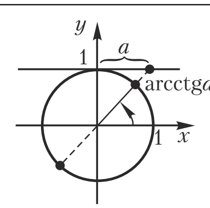


Значения тригонометрических функций для некоторых углов

радианы	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
градусы	$-180°$	$-90°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Формулы приведения									
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi n-\alpha$, где $n\in\mathbf{Z}$	$2\pi n+\alpha$, где $n\in\mathbf{Z}$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений	
$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$
$\sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$
$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

Простейшие тригонометрические уравнения		
$\sin x=a$	Если $a\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Если $\lvert a\rvert>1$, то корней нет.	
$\cos x=a$	Если $a\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Если $\lvert a\rvert>1$, то корней нет.	
$\mathrm{tg}\,x=a$	$x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.	
$\mathrm{ctg}\,x=a$	$x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.	

Некоторые типы тригонометрических уравнений	
$\sin x=\sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2\pi n, \\ x=\pi-y+2\pi n, \end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}$	$\cos x=\cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2\pi n, \\ x=-y+2\pi n, \end{array}\right.\ n\in\mathbf{Z}$
$\mathrm{tg}\,x=\mathrm{tg}\,y \Leftrightarrow x=y+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$	$\mathrm{ctg}\,x=\mathrm{ctg}\,y \Leftrightarrow x=y+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$

Основные тригонометрические равенства и схема их взаимосвязей ($\oplus$ — означает «сложить»; $\ominus$ — «вычесть».)

$3\alpha = 2\alpha + \alpha$
$4\alpha = 2\alpha + 2\alpha$
...

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\mathrm{tg}3\alpha = \dfrac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}3\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$

$+\beta = -(-\beta) \qquad -\beta = +(-\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\oplus$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\ominus$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\oplus$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$\left.\begin{aligned}\alpha-\beta &= x\\ \alpha+\beta &= y\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned}\alpha &= \dfrac{x+y}{2}\\ \beta &= \dfrac{y-x}{2}\end{aligned}\right.$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$

$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$

$y \rightarrow (-y)$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin\alpha \pm \sqrt{3}\cos\alpha = 2\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt{3}\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$2\alpha = \alpha + \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$
$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

$\mathrm{ctg}2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$

$1 = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ $\ominus$

$\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ $\oplus$

$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha$

Универсальная тригонометрическая подставка

$\sin\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$

$\left.\begin{aligned}\cos\dfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}\\ \sin\dfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}\end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Знак перед корнем выбирается по знаку левой части

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

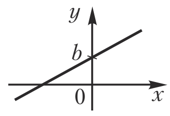
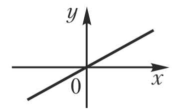
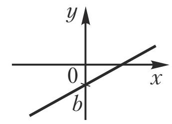
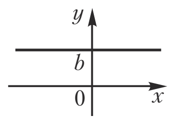
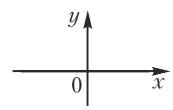
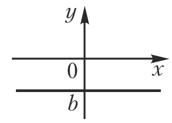
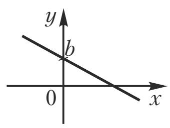
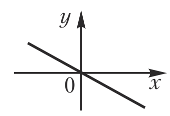
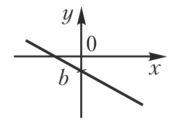
$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

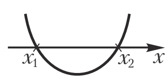
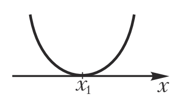
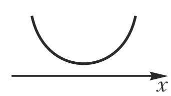
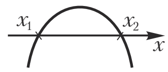
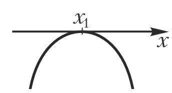
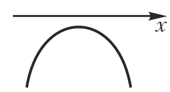
$D(y)$ — область определения функции; $E(y)$ — область значений функции

Линейная функция: $y = kx + b$ ($D(y) = \mathbf{R}$)

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$k > 0$			
$k = 0$			
$k < 0$			

Квадратичная функция: $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

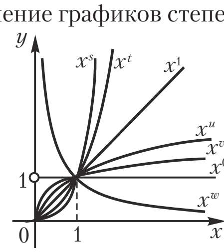
($D(y) = \mathbf{R}$; дискриминант $D = b^2 - 4ac$; $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ — координаты вершины параболы)

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Степенная функция: $y = x^r$

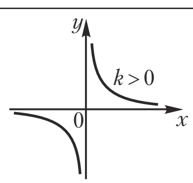
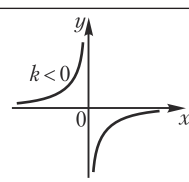
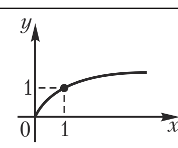
1. Если $r \in \mathbf{N}$, то $D(y) = \mathbf{R}$.
2. Если $r \in \mathbf{Z}$, $r \leq 0$, то $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. Если r — не целое, $r > 0$, то $D(y) = [0; +\infty)$.
4. Если r — не целое, $r < 0$, то $D(y) = (0; +\infty)$.

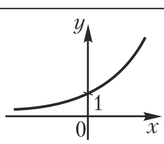
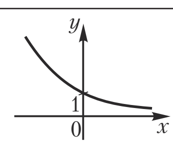
Сравнение графиков степенных функций (для $x \in (0; +\infty)$)

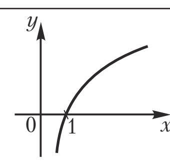
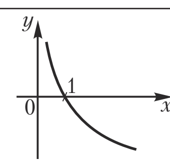


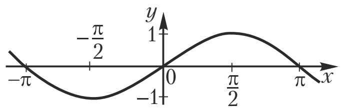
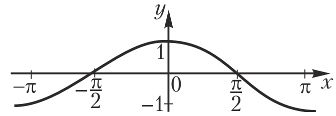
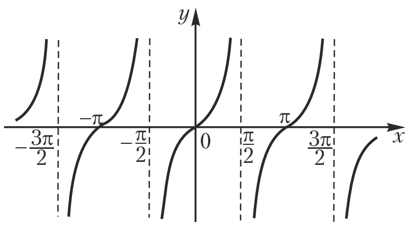
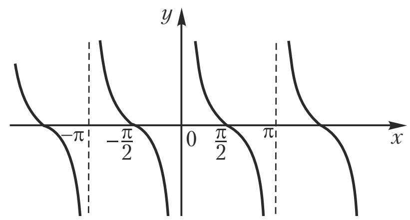
$w < 0 < v < u < 1 < t < s$

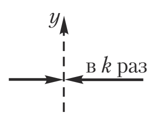
Частные случаи степенной функции

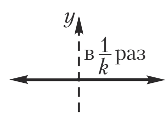
Обратная пропорциональность: $y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$ ($D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$)		**Функция** $y = \sqrt{x}$ ($D(y) = [0; +\infty)$)
 $k > 0$	 $k < 0$	

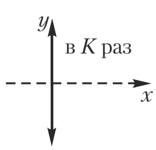
Показательная функция: $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ ($D(y) = \mathbf{R}$)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

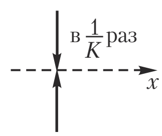
Логарифмическая функция: $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ ($D(y) = (0; +\infty)$)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

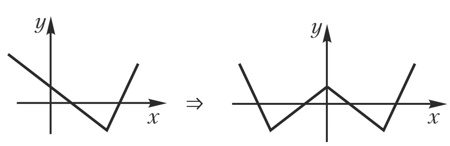
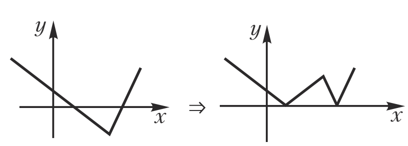
<table>
<tr><th colspan="2">Тригонометрические функции</th></tr>
<tr><td>$y=\sin x$ $(D(y)=\mathbf{R},\ E(y)=[-1;1])$</td><td>$y=\cos x$ $(D(y)=\mathbf{R},\ E(y)=[-1;1])$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$y=\operatorname{tg} x$ $\left(D(y)=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in\mathbf{Z}\right\},\ E(y)=\mathbf{R}\right)$</td><td>$y=\operatorname{ctg} x$ $\left(D(y)=\mathbf{R}\setminus\left\{\pi n \mid n\in\mathbf{Z}\right\},\ E(y)=\mathbf{R}\right)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">Геометрические преобразования графиков функций</th></tr>
<tr><td colspan="2">$f(x)$</td><td colspan="2">График функции $f(x)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$f(-x)$</td><td colspan="2">Симметрия относительно оси Oy</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$-f(x)$</td><td colspan="2">Симметрия относительно оси Ox</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f(x+b)$</td><td>$\xleftarrow{\text{на } b}$ Сдвиг влево на b, если $b>0$.</td><td>$\xrightarrow{\text{на } |b|}$ Сдвиг вправо на $|b|$, если $b<0$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$f(x)+B$</td><td>$\uparrow$ на B Сдвиг вверх на B, если $B>0$.</td><td>$\downarrow$ на $|B|$ Сдвиг вниз на $|B|$, если $B<0$.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$f(kx)$</td><td>

Сжатие в k раз вдоль оси Ox к оси Oy, если $k>1$.</td><td>

Растяжение в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox от оси Oy, если $0<k<1$.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$Kf(x)$</td><td>

Растяжение в K раз вдоль оси Oy от оси Ox, если $K>1$.</td><td>

Сжатие в $\frac{1}{K}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox, если $0<K<1$.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$f(|x|)$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$|f(x)|$</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Правила построения графика функции $f(kx+b)=f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)$:

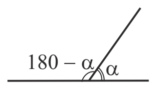
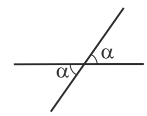
1-й способ. $f(x)\ \to$ (преобраз. 5) $\to\ f(kx)\ \to$ (преобраз. 3) $\to f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)=f(kx+b)$.

2-й способ. $f(x)\ \to$ (преобраз. 3) $\to f(x+b)\to$ (преобраз. 5) $\to f(kx+b)$.

Уравнение окружности. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ — уравнение окружности с центром в точке $(x_0;\ y_0)$ и радиусом R.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Углы

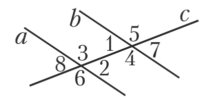
Смежные углы	Вертикальные углы
 Сумма смежных углов равна 180°	 Вертикальные углы равны

Параллельные прямые

Накрест лежащие углы равны ($\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$; $\angle 5=\angle 6$; $\angle 7=\angle 8$).
Соответственные углы равны ($\angle 1=\angle 8$; $\angle 2=\angle 7$; $\angle 3=\angle 5$; $\angle 4=\angle 6$).
Сумма односторонних углов равна 180°
($\angle 1+\angle 3=\angle 5+\angle 8=\angle 2+\angle 4=\angle 6+\angle 7=180°$).

$\Leftrightarrow$

Прямые a и b параллельны,
прямая c — секущая

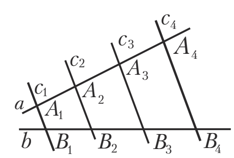


Обобщенная теорема Фалеса

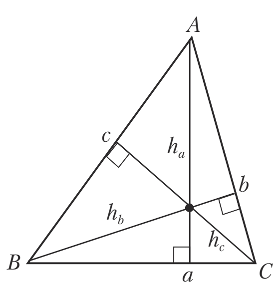
Если на одной из двух прямых отложены несколько отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то $\Rightarrow$ на второй прямой высекутся отрезки, пропорциональные данным.

$c_1 \parallel c_2 \parallel c_3 \parallel c_4$

$A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_2B_3 : B_3B_4$



Площадь треугольника



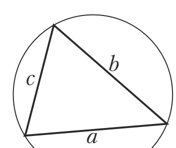
$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;$

$S=\frac{1}{2}ab\sin\angle C=\frac{1}{2}bc\sin\angle A=$

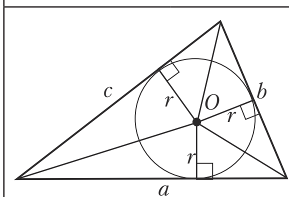
$=\frac{1}{2}ac\sin\angle B;$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$.



$S=\frac{abc}{4R}$,
где R — радиус описанной окружности.

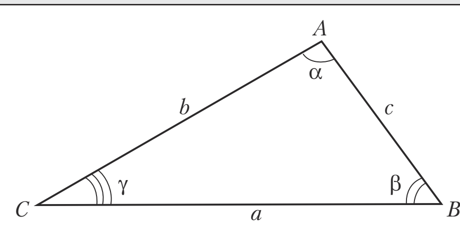


$S=pr$,
где $p=\frac{a+b+c}{2}$, а r — радиус вписанной окружности.

Метрические соотношения для треугольников

Сумма внутренних углов: $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

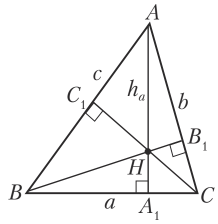
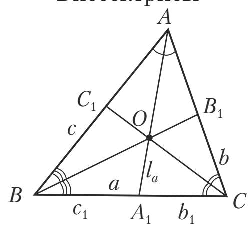
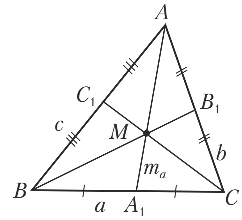
Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta;$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$

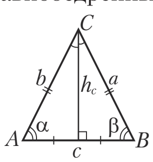
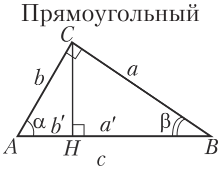
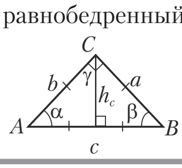


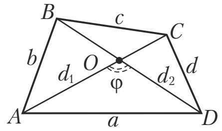
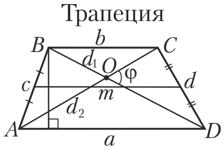
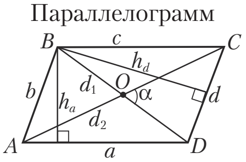
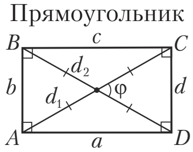
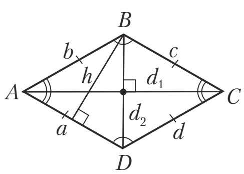
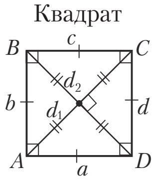
Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$, где R — радиус описанной окружности.

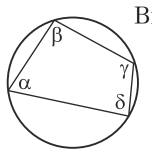
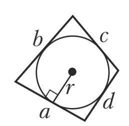
Неравенство треугольника: $a-b<c<a+b$; $b-c<a<b+c$; $a-c<b<a+c$.

Обозначения, используемые в таблицах:
a, b, c – стороны треугольника ABC; α, β, γ — соответственно противолежащие этим сторонам углы;
h_a, m_a, l_a – высота, медиана, биссектриса, проведенные к стороне a;
a' – проекция катета a на гипотенузу c; b' – проекция катета b на гипотенузу c;
r – радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности; S — площадь треугольника.

Высоты, биссектрисы, медианы треугольника			
	Высоты	Биссектрисы	Медианы
			
Точка пересечения	H — ортоцентр $BH\cdot HB_1=CH\cdot HC_1=AH\cdot HA_1$	O — центр вписанной окружности $\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a};\ \frac{BO}{OB_1}=\frac{a+c}{b};$ $\frac{CO}{OC_1}=\frac{a+b}{c}$	M — центр масс $\frac{AM}{MA_1}=\frac{BM}{MB_1}=\frac{CM}{MC_1}=\frac{2}{1}$
Длина	$h_a=b\sin C=c\sin B;$ $h_a=\frac{2S}{a}$	$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c};\ l_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c};$ $l_a^2=bc-b_1c_1;\ l_a^2=bc-\frac{bca^2}{(b+c)^2}$	$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$
Свойства	$\Delta AB_1C_1\sim\Delta ABC$ с $k=\cos A$. $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r};\ h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$	$\frac{c_1}{b_1}=\frac{c}{b};\ b_1=\frac{ab}{b+c};\ c_1=\frac{ac}{b+c};$ $\frac{S_{\Delta AA_1B}}{S_{\Delta AA_1C}}=\frac{AB}{AC}$	$S_{\Delta ABA_1}=S_{\Delta ACA_1};$ $S_{\Delta BMA_1}=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$

Частные случаи треугольников	
Вид треугольника	Основные свойства и соотношения между элементами
Равнобедренный 	$a=b;\ \alpha=\beta;$ $h_a=h_b=\frac{2S}{a};\ h_c=m_c=l_c=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2};$ $r=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};\ R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{c}{2\sin\gamma}$
Равносторонний 	$a=b=c;\ \alpha=\beta=\gamma=60^\circ;$ $h_a=h_b=h_c=m_a=m_b=m_c=l_a=l_b=l_c=\frac{a\sqrt{3}}{2};$ $r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3};\ R=2r;\ S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Прямоугольный  Пифагоровы тройки 3:4:5 5:12:13 8:15:17 7:24:25	$\angle C=\alpha+\beta=90^\circ;$ **Теорема Пифагора:** $c^2=a^2+b^2;\ \Delta CBH\sim\Delta ACH\sim\Delta ABC;\ a^2=ca';\ b^2=cb';\ h_c^2=a'b';$ $\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos\beta;\ \cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\operatorname{ctg}\beta;\ \operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha;$ $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2};\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2};\ m_c=\frac{1}{2}c=R;\ h_a=b;\ h_b=a;\ h_c=\frac{ab}{c}=\sqrt{a'b'};\ l_c=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b};$ $r=\frac{a+b-c}{2};\ R=\frac{c}{2};\ R+r=\frac{a+b}{2};\ S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch_c$
Прямоугольный равнобедренный 	$\gamma=90^\circ;\ \alpha=\beta=45^\circ;\ a=b;\ c=a\sqrt{2};$ $m_a=m_b=\frac{a\sqrt{5}}{2};\ m_c=h_c=l_c=\frac{c}{2};\ S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}c^2$

Четырехугольники		
Вид четырехугольника	Основные соотношения	Площадь
Произвольный выпуклый 	$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; $S_{\Delta AOB}\cdot S_{\Delta COD}=S_{\Delta BOC}\cdot S_{\Delta AOD}$	$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Трапеция 	$a\parallel b$; $m\parallel a$; $m\parallel b$; m — средняя линия; $m=\frac{a+b}{2}$; $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=180°$; $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}$; $S_{\Delta ABO}=S_{\Delta CDO}$; $S_{\Delta AOD}:S_{\Delta COB}=a^2:b^2$	$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$; $S=m\cdot h$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Параллелограмм 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=c$; $b=d$; $\angle A=\angle C$; $\angle B=\angle D$; $\angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle D+\angle A=180°$; $AO=OC$; $BO=OD$; $d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$; $\Delta ABC=\Delta CDA$; $\Delta ABD=\Delta CDB$; $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}=S_{\Delta DOA}$	$S=ah_a=dh_d$; $S=ab\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Прямоугольник 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=c$; $b=d$; $a\perp b$; $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$; $d_1=d_2$; $d_1^2=a^2+b^2$; $R=\frac{d_1}{2}$; для произвольной точки E верно равенство $AE^2+EC^2=BE^2+ED^2$	$S=ab$; $S=\frac{1}{2}d_1^2\sin\varphi$
Ромб 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=b=c=d$; $\angle A=\angle C$; $\angle B=\angle D$; $d_1\perp d_2$; диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба; $r=\frac{h}{2}$	$S=ah$; $S=a^2\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2$
Квадрат 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=b=c=d$; $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$; $d_1=d_2$; $d_1\perp d_2$; $d_1=a\sqrt{2}$; $r=\frac{a}{2}$, $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$S=a^2$; $S=\frac{1}{2}d_1^2$

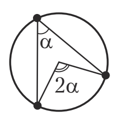
Вписанные и описанные четырехугольники	
 Вписанный четырехугольник $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180° \Leftrightarrow$ четырехугольник вписан в окружность	 Описанный четырехугольник $a+c=b+d \Leftrightarrow$ четырехугольник описан около окружности; $S=pr$, где $p=\frac{a+b+c+d}{2}$, r — радиус

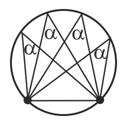
Правильные многоугольники	
Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой.	
Обозначения: a_n — сторона, r_n — радиус вписанной окружности, R_n — радиус описанной окружности, P_n — периметр, S_n — площадь, α_n — угол между смежными сторонами.	$\alpha_n=\frac{180°(n-2)}{n}$; $r_n=\frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}=R_n\cos\frac{180°}{n}$; $R_n=\frac{r_n}{\cos\frac{180°}{n}}=\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$; $S_n=\frac{n}{2}R_n^2\sin\frac{360°}{n}=\frac{n}{4}a_n^2\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}=\frac{1}{2}r_n\cdot P_n$

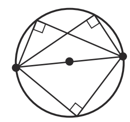
Формулы для правильных многоугольников с числом сторон 3, 4, 6, 8					
n	α	r	R	S	Соотношение между r и R
3	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=2r$
4	90°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2	$R=r\sqrt{2}$
6	120°	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R\sqrt{3}=2r$
8	135°	$\frac{a\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$	$\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\frac{r}{R}=\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

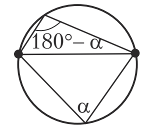
Элементы	***Правильный n-угольник,***	
	вписанный в окружность радиуса R	***описанный около окружности радиуса r***
Сторона	$a=2R\sin\frac{\pi}{n}$	$a=2r\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$
Периметр	$P=2nR\sin\frac{\pi}{n}$	$P=2nr\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$
Площадь	$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$	$S=nr^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$

Центральные и вписанные углы

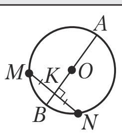




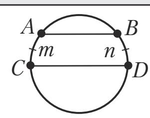




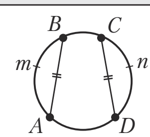
Свойства дуг и хорд



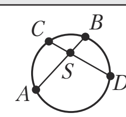
$(AB\perp MN)\Leftrightarrow(MK=KN)$



$(AB\parallel CD)\Leftrightarrow\left(\overset{\smile}{AmC}=\overset{\smile}{BnD}\right)$



$\left(\overset{\smile}{AmB}=\overset{\smile}{CnD}\right)\Leftrightarrow(AB=CD)$

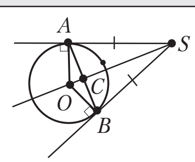


$AS\cdot SB=CS\cdot SD$

ΔASC и ΔDSB подобны;

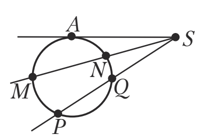
ΔASD и ΔBSC подобны

Свойства касательных и секущих



SA, SB — касательные,

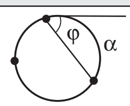
$AS=SB$; $\angle ASO=\angle BSO=\angle OAB=\angle OBA$



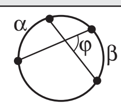
SM, SP — секущие, SA — касательная, $SM\cdot SN=SP\cdot SQ$;

$SM\cdot SN=SA^2$; $\Delta SAN\sim\Delta SMA$; $\Delta SNQ\sim\Delta SPM$

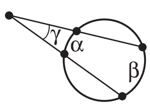
Углы между хордами, касательными и секущими



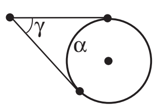
$\varphi=\frac{\alpha}{2}$



$\varphi=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

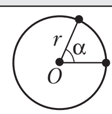


$\gamma=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$



$\gamma=180°-\alpha$

Длина дуги (l) и окружности (L)

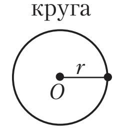


$l=\frac{\pi r\alpha°}{180°}$ — длина дуги величины α градусов и радиуса r.

$L=2\pi r$ – длина окружности радиуса r

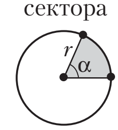
Площадь

круга



$S=\pi r^2$ — площадь круга радиуса r

сектора



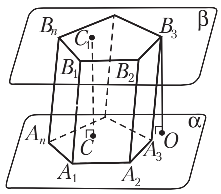
$S=\frac{\pi r^2\alpha°}{360°}$ — площадь сектора с углом α градусов и радиуса r

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Многогранники

Многогранник представляет собой геометрическое тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников, любые два из которых, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости; сами многоугольники называются *гранями*, их стороны — *ребрами многогранника*, а их вершины — *вершинами многогранника*.
Фигура, образованная всеми гранями многогранника, называется его *поверхностью* (*полной поверхностью*), а сумма площадей **всех** его граней — площадью (*полной*) *поверхности*.
Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Если это условие не выполняется, то многогранник называется *невыпуклым*.
Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, все грани которого — равные между собой правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Существует всего пять правильных многогранников: тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб, додекаэдр.

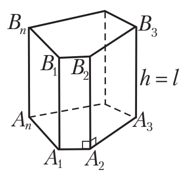
Призма



Призма (n-угольная) — это многогранник, у которого две грани — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы. Равные n-угольники называются основаниями, а параллелограммы — *боковыми гранями* призмы. Сумма площадей боковых граней называется *площадью боковой поверхности* призмы, а сумма площадей **всех** ее граней — площадью (*полной*) *поверхности*. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях.

- Основания призмы — равные многоугольники $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$;
- основания призмы расположены в параллельных плоскостях α и β;
- боковые грани призмы: $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ — параллелограммы;
- A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n — боковые ребра;
- боковые ребра призмы равны и лежат на параллельных прямых;
- высота призмы h (например, CC_1 или B_3O) — отрезок перпендикуляра между параллельными плоскостями α и β;
- $S_{\text{бок.}} = S_{A_1A_2B_2B_1} + S_{A_2A_3B_3B_2} + ... + S_{A_1A_nB_nB_1}$ — площадь боковой поверхности;
- $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$ — площадь полной поверхности;
- $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$ — объем призмы.

Прямая призма
Правильная призма

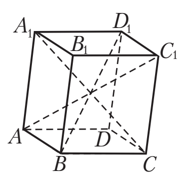


Прямая призма — это такая призма, у которой *боковые грани* — прямоугольники. Боковые ребра и боковые грани прямой призмы перпендикулярны плоскостям, в которых лежат ее основания.

- Боковые ребра прямой призмы перпендикулярны основаниям;
- боковые грани прямой призмы — прямоугольники;
- высота прямой призмы равна боковому ребру.

Правильная n-угольная призма — это призма, у которой выполнены *два условия*: 1) все *боковые грани* — прямоугольники; 2) основания призмы — *правильные* n-угольники.
Правильная призма — частный случай прямой призмы.

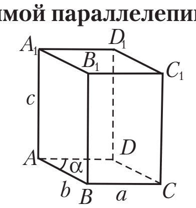
Параллелепипед



Параллелепипед — это многогранник, у которого *шесть граней* и *каждая* из них — *параллелограмм*. Иногда какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда выделяются и называются *основаниями*, тогда остальные грани — *боковыми* гранями, а их стороны, соединяющие вершины оснований параллелепипеда, — его *боковыми* ребрами. Сумма площадей боковых граней называется *площадью боковой поверхности*.
Две вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной грани, называются *противолежащими*. Отрезок, соединяющий противолежащие вершины параллелепипеда, называется *диагональю параллелепипеда*. Параллелепипед имеет *четыре диагонали*, которые пересекаются в *одной точке* и делятся этой точкой *пополам*. Противолежащие грани параллелепипеда равны и лежат в параллельных плоскостях.
Параллелепипед — призма, основания которой — параллелограммы.

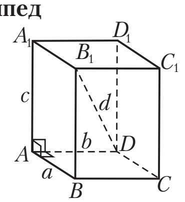
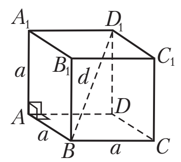
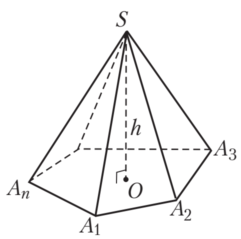
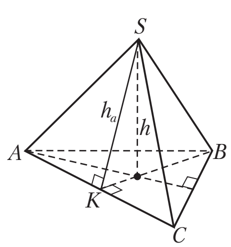
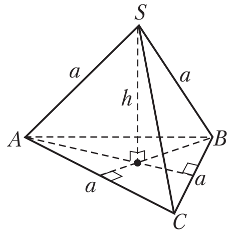
- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам;
- противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.

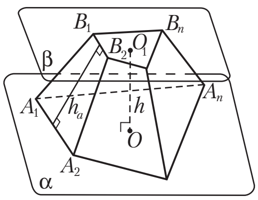
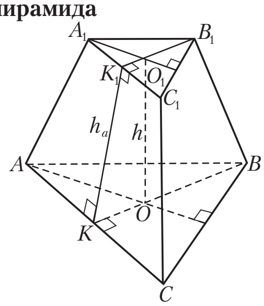
Прямой параллелепипед

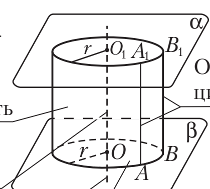
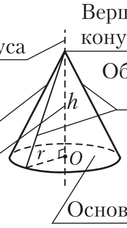
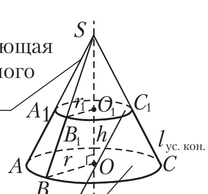


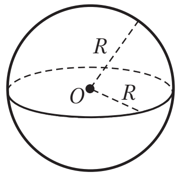
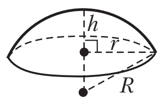
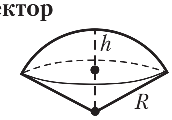
Прямой параллелепипед — это такой параллелепипед, у которого *боковые грани* — прямоугольники. Боковые ребра и боковые грани прямого параллелепипеда перпендикулярны плоскостям, в которых лежат его основания.
Прямой параллелепипед — прямая призма, основания которой — параллелограммы.

- Боковые ребра прямого параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания ($ABCD$ — параллелограмм);
- боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед 	***Прямоугольный параллелепипед*** — это такой параллелепипед, у которого *все грани* — прямоугольники. Диагонали прямоугольного параллелепипеда *равны*. ***Прямоугольный параллелепипед*** — прямой параллелепипед, основания которого — прямоугольники. • Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками; • все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; • $S = 2(ab + ac + bc)$ — площадь полной поверхности; • $V = abc$ — объем прямоугольного параллелепипеда.
Куб 	***Куб*** — это многогранник, имеющий *шесть граней*, которые являются *равными квадратами*. ***Куб*** — прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны между собой. • Все грани куба — равные квадраты; • $d = a\sqrt{3}$ — диагональ куба с ребром a; • $S = 6a^2$ — площадь полной поверхности куба с ребром a; • $V = a^3$ — объем куба.
Пирамида 	***Пирамида (n-угольная)*** — это многогранник, у которого одна грань — произвольный n-угольник, а остальные n граней — треугольники с общей вершиной, n-угольник называется *основанием* пирамиды; треугольники, имеющие общую вершину, называются *боковыми гранями*, а их общая вершина называется *вершиной* пирамиды. Сумма площадей боковых граней называется *площадью боковой поверхности* пирамиды, а сумма площадей **всех** ее граней — площадью (*полной*) *поверхности*. Стороны граней пирамиды называются ее *ребрами*, а ребра, сходящиеся в вершине, называются *боковыми*. • Основание пирамиды — многоугольник $A_1A_2...A_n$; • боковые грани пирамиды: A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 — треугольники; • A_1S, A_2S, A_3S, ..., A_nS — боковые ребра; • точка S — вершина пирамиды; • высота пирамиды h (SO) — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость основания; • $S_{бок.} = S_{\Delta A_1SA_2} + S_{\Delta A_2SA_3} + ... + S_{\Delta A_nSA_1}$ — площадь боковой поверхности; • $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$ — площадь полной поверхности; • $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$ — объем пирамиды.
Правильная пирамида 	***Правильная n-угольная пирамида*** — это пирамида, у которой выполнены *два условия*: 1) все *боковые ребра равны*; 2) основание пирамиды — *правильный n*-угольник. У правильной пирамиды боковые грани — *равные между собой равнобедренные треугольники*; отрезок, соединяющий вершину правильной пирамиды с центром ее основания, является *высотой* пирамиды. • Основание — правильный многоугольник; • отрезок, соединяющий центр основания с вершиной пирамиды, является ее высотой; • все боковые ребра равны; • все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; • все двугранные углы при ребрах основания равны; • все плоские углы при вершине равны; • все двугранные углы при боковых ребрах равны; • апофема h_a — высота боковой грани (например, SK), проведенная к основанию; все апофемы равны; • $S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot h_a$ — площадь боковой поверхности.
Тетраэдр 	***Тетраэдр*** — треугольная пирамида, все четыре грани которой — *равные правильные треугольники*. Тетраэдр — частный случай правильной треугольной пирамиды. ***Тетраэдр (правильный тетраэдр)*** — треугольная пирамида, все грани которой — правильные треугольники. • $h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ — высота; • $R = \frac{3h}{4}$ — радиус описанной сферы; • $r = \frac{h}{4}$ — радиус вписанной сферы; • $S_{полн.} = a^2\sqrt{3}$ — площадь полной поверхности; • $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ — объем тетраэдра.

Усеченная пирамида 	***Усеченной пирамидой*** называется часть полной пирамиды, заключенная между основанием и параллельным ему сечением. • Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$; • основания усеченной пирамиды расположены в параллельных плоскостях α и β; • боковые грани усеченной пирамиды: $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ — трапеции; • A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n — боковые ребра; • высота усеченной пирамиды h (OO_1) — отрезок перпендикуляра между параллельными плоскостями α и β; • h_a — высота боковой грани $A_1B_1B_2A_2$; • $V_{\text{ус. пир.}} = \frac{h}{3}\cdot\left(S_{\text{верх.}} + S_{\text{нижн.}} + \sqrt{S_{\text{верх.}}\cdot S_{\text{нижн.}}}\right)$ — объем усеченной пирамиды.
Правильная усеченная пирамида 	***Правильной усеченной пирамидой*** называется часть правильной пирамиды, заключенная между основанием и параллельным ему сечением. • Основания правильной усеченной пирамиды — правильные подобные многоугольники; • все боковые ребра равны; • все боковые грани — равные равнобедренные трапеции; • отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h правильной усеченной пирамиды; • апофема h_a — высота боковой грани (например, KK_1); все апофемы равны.

Тела вращения	
Цилиндр 	• r — радиус окружностей оснований цилиндра; • отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h цилиндра; • прямая OO_1 называется осью цилиндра; сечение цилиндра плоскостью, содержащей ось цилиндра, называется *осевым сечением*; • длина высоты цилиндра равна длине образующей цилиндра; • $S = 2\pi rh$ — площадь боковой поверхности; • $S = 2\pi r(r+h)$ — площадь полной поверхности; • $V = \pi r^2 h$ — объем цилиндра.
Конус 	• r — радиус окружности основания конуса; • отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания, является образующей l конуса; • отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, является высотой h конуса; • прямая, содержащая высоту конуса, называется *осью конуса*; сечение конуса плоскостью, содержащей ось конуса, называется *осевым сечением*; • $S = \pi rl$ — площадь боковой поверхности; • $S = \pi r(r+l)$ — площадь полной поверхности, где l — образующая конуса; • $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ — объем конуса.
Усеченный конус 	• r и r_1 — радиусы соответственно большего и меньшего оснований усеченного конуса; • отрезок, соединяющий центры оснований (OO_1), является высотой h усеченного конуса; • l — образующая усеченного конуса (например, BB_1 или CC_1); • $S = \pi(r + r_1)l$ — площадь боковой поверхности усеченного конуса; • $S = \pi(r + r_1)l + \pi r^2 + \pi r_1^2$ — площадь полной поверхности усеченного конуса; • $V = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r_1^2 + r\cdot r_1\right)$ — объем усеченного конуса.

Шар 	• R — радиус шара; • $S = 4\pi R^2$ — площадь поверхности (площадь сферы); • $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара.
Шаровой сегмент 	• r — радиус основания шарового сегмента; • R — радиус шара; • h — высота шарового сегмента; • $S = 2\pi Rh$ — площадь сферической части поверхности шарового сегмента; • $V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$ — объем шарового сегмента.
Шаровой сектор 	• R — радиус шара; • h — высота шарового сегмента; • $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ — объем шарового сектора.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Таблица производных

$(C)' = 0$, где C — константа $(kx+b)' = k$	$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$ В частности: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Правила нахождения производных

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, где C — константа
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$	

Прямая, проходящая через две заданные точки

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.	$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ — уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной

$-\frac{1}{k}$ — угловой коэффициент прямой, перпендикулярной прямой $y = kx + b$.

Касательная к графику функции $f(x)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.	$f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.